(ma)Thématiques de pré-rentrée

16 avril 2014

Plan

Plan

Plan détaillé : Écrire des mathématiques

Introduction

Exemple : *Extrait du Siddhantasundaraprakrti (Inde, vers 1500)*
La racine [approchée] ajoutée au quotient du carré propre, divisé par la racine approchée, [le tout] divisé par deux sera la racine approchée. Ensuite, [si on opère] encore et encore, on aura la vraie racine exactement.

Introduction (2)

Exemple : *Une démonstration avec l'assistant de preuve Coq*

```
length_corr =
fun (n : nat) (s : seq n) =>
seq_ind (fun (n0 : nat) (s0 : seq n0) => length n0 s0 = n0)
(refl_equal 0)
(fun (n0 _ : nat) (s0 : seq n0) (IHs : length n0 s0 = n0) =>
eq_ind_r
(fun n2 : nat => S n2 = S n0)
(refl_equal (S n0)) IHs) n s
: forall (n : nat) (s : seq n), length n s = n
```

Introduction (3)

Exemple : *Critère de Cauchy*
Extrait d'un cours de mathématiques de première année :

Introduction (4)

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il a introduit une notion précise de continuité et a élaboré une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

1.1.2 Critère de Cauchy

THÉORÈME 1.1 (Critère de Cauchy)
Une condition nécessaire et suffisante pour que la série numérique $\sum_n u_n$ *converge est qu'elle vérifie le* critère de Cauchy *:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant m \geqslant N \Longrightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

Démonstration La série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ qui lui est associée converge. Or, une suite numérique converge si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy[10]. Ainsi la série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire[11] si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant p \geqslant \tilde{N} \Longrightarrow |U_n - U_p| \leqslant \varepsilon\right). \tag{2}$$

Soit ε un réel strictement positif et $N = \tilde{N}+1$ où $\tilde{N}$ est défini par l'assertion (2). Pour tous réels m et n tels que $n \geqslant m \geqslant \tilde{N}+1$ on a

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| = |U_n - U_{m-1}| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'assertion (2) où $p = m - 1$. Le résultat est établi. □

FIGURE: Critère de Cauchy

Introduction (5)

- L'écriture d'un texte mathématique suit des règles.
- Ces règles ont évolué avec le temps et les progrès du savoir.
- Elles dépendent du lecteur à qui le texte s'adresse.
- Elles ont pour but de permettre à ce lecteur de vérifier facilement la validité des énoncés mathématiques.

Différents niveaux de langage

Définition

1. Le **langage formel** ou **symbolique**. C'est la partie du texte qui utilise des formules, notations, symboles et mots ayant un sens précis en mathématiques. Il est dépourvu de toute ambiguïté.
2. Le **métalangage** ou **langage métamathématique**. C'est la partie du texte qui exprime les liens entre les propositions, comment elles se déduisent les unes des autres et ce que l'on peut affirmer au sujet de leur valeur de vérité. Écrit en français, il est nécessairement équivoque, mais il permet de rendre plus lisibles les définitions et les énoncés des propositions et théorèmes.
3. Afin d'augmenter la lisibilité et la clarté d'un texte mathématique, on utilise des commentaires, des figures, des rappels, des références,... Cela permet d'expliquer ce que l'on va faire, de commenter un résultat, de relier un calcul ou une affirmation à des résultats connus.

Différents niveaux de langage (2)

Exemple : *Critère de Cauchy*
Extrait d'un cours de mathématiques de première année :

Différents niveaux de langage (3)

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il a introduit une notion précise de continuité et a élaboré une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

1.1.2 Critère de Cauchy

THÉORÈME 1.1 (Critère de Cauchy)
Une condition nécessaire et suffisante pour que la série numérique $\sum_n u_n$ converge est qu'elle vérifie le critère de Cauchy *:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \geqslant m \geqslant N \Longrightarrow |\sum_{k=m}^{n} u_k| \leqslant \varepsilon).$$

Démonstration La série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ qui lui est associée converge. Or, une suite numérique converge si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy[(10)]. Ainsi la série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire[(11)] si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant p \geqslant \widetilde{N} \Longrightarrow |U_n - U_p| \leqslant \varepsilon\right). \qquad (2)$$

Soit ε un réel strictement positif et $N = \widetilde{N}+1$ où $\widetilde{N}$ est défini par l'assertion (2). Pour tous réels m et n tels que $n \geqslant m \geqslant \widetilde{N}+1$ on a

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| = |U_n - U_{m-1}| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'assertion (2) où $p = m - 1$. Le résultat est établi. □

FIGURE: Critère de Cauchy

Différents niveaux de langage (4)

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il a introduit une notion précise de continuité et a élaboré une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

1.1.2 Critère de Cauchy

THÉORÈME 1.1 (Critère de Cauchy)
Une condition nécessaire et suffisante pour que la série numérique $\sum_n u_n$ converge est qu'elle vérifie le critère de Cauchy *:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant m \geqslant N \Longrightarrow \Big|\sum_{k=m}^{n} u_k\Big| \leqslant \varepsilon\right).$$

Démonstration La série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ qui lui est associée converge. Or, une suite numérique converge si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy[10]. Ainsi la série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire[11] si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant p \geqslant \tilde{N} \Longrightarrow |U_n - U_p| \leqslant \varepsilon\right). \qquad (2)$$

Soit ε un réel strictement positif et $N = \tilde{N}+1$ où $\tilde{N}$ est défini par l'assertion (2). Pour tous réels m et n tels que $n \geqslant m \geqslant \tilde{N}+1$ on a

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| = |U_n - U_{m-1}| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'assertion (2) où $p = m-1$. Le résultat est établi. □

FIGURE: Critère de Cauchy - langage formel

Différents niveaux de langage (5)

Séries numériques 9

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il a introduit une notion précise de continuité et a élaboré une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

1.1.2 Critère de Cauchy

THÉORÈME 1.1 (Critère de Cauchy)
Une condition nécessaire et suffisante pour que la série numérique $\sum_n u_n$ converge est qu'elle vérifie le critère de Cauchy *:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \geqslant m \geqslant N \Longrightarrow |\sum_{k=m}^{n} u_k| \leqslant \varepsilon).$$

Démonstration La série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ qui lui est associée converge. Or, une suite numérique converge si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy[(10)]. Ainsi la série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire[(11)] si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant p \geqslant \widetilde{N} \Longrightarrow |U_n - U_p| \leqslant \varepsilon\right). \qquad (2)$$

Soit ε un réel strictement positif et $N = \widetilde{N}+1$ où $\widetilde{N}$ est défini par l'assertion (2). Pour tous réels m et n tels que $n \geqslant m \geqslant \widetilde{N}+1$ on a

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| = |U_n - U_{m-1}| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'assertion (2) où $p = m - 1$. Le résultat est établi. □

FIGURE: Critère de Cauchy - métalangage

Différents niveaux de langage (6)

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il a introduit une notion précise de continuité et a élaboré une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

1.1.2 Critère de Cauchy

THÉORÈME 1.1 (Critère de Cauchy)
Une condition nécessaire et suffisante pour que la série numérique $\sum_n u_n$ converge est qu'elle vérifie le critère de Cauchy *:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \geqslant m \geqslant N \Longrightarrow |\sum_{k=m}^{n} u_k| \leqslant \varepsilon).$$

Démonstration La série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ qui lui est associée converge. Or, une suite numérique converge si et seulement s'il s'agit d'une suite de Cauchy[10]. Ainsi la série numérique $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_n$ de terme général $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire[11] si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \tilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \left(n \geqslant p \geqslant \tilde{N} \Longrightarrow |U_n - U_p| \leqslant \varepsilon\right). \tag{2}$$

Soit ε un réel strictement positif et $N = \tilde{N}+1$ où $\tilde{N}$ est défini par l'assertion (2). Pour tous réels m et n tels que $n \geqslant m \geqslant \tilde{N}+1$ on a

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| = |U_n - U_{m-1}| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'assertion (2) où $p = m-1$. Le résultat est établi. □

FIGURE: Critère de Cauchy - commentaires

Différents niveaux de langage (7)

Attention : *L'écriture mathématique ne suit pas les règles du langage courant*

- Le langage courant est moins précis que le langage mathématique ;
- Il y a des faux-amis, comme dans l'étude des langues étrangères ;
- Les mots "et", "ou", "si", "alors" n'ont pas le même sens dans une discussion de la vie quotidienne et comme opérateurs logiques dans un raisonnement mathématique.

Fondamental

Les règles d'écriture d'un texte mathématique dépendent du niveau de langage dans lequel on se situe.

Règle 1 : toujours définir les objets qu'on utilise...

avant de les utiliser !

Exemple : *:-(*
Si $\cos(x) = \sin(x)$, alors x est égal à $\frac{\pi}{4}$.

Exemple : *:-)*
Soit $x \in [0, \pi]$. Si $\cos(x) = \sin(x)$, alors x est égal à $\frac{\pi}{4}$.

Règle 1 : toujours définir les objets qu'on utilise... (2)

Fondamental

Un objet introduit dans une formule mathématique n'est pas défini au-delà !

Exemple : *:-(*

$$\forall x \in]0,1[, \quad \ln(x) < 0$$

On en déduit $\frac{1}{\ln(x)} < 0$.

Exemple : *:-)*

$$\forall x \in]0,1[, \quad \ln(x) < 0$$

Soit $x \in]0,1[$; on déduit de l'inégalité précédente $\frac{1}{\ln(x)} < 0$.

Règle 2 : utiliser des notations cohérentes et standard

Exemple : *:-(*

- Soit E l'ensemble des nombres complexes
- Soit $\pi = 3$
- Soit $n \in]0, 1[$
- Soit $X \in x$

Conseil

- N'introduire que les symboles indispensables, qui vont être réutilisés plusieurs fois ;
- Utiliser des notations conformes aux usages, ou facilement mémorisables (exemple f pour une fonction).

Règle 3 : un texte mathématique est un texte

Il est écrit dans la langue du lecteur, donc en français, et l'usage du langage formel ne doit servir qu'à clarifier le propos plutôt qu'à le complexifier.

Conseil

- Informer le lecteur de ses intentions, ménager des transitions entre les différentes parties d'une démonstration ou d'un calcul ;
- Ne pas commencer une phrase par un symbole mathématique ;
- Ne pas utiliser les symboles $\forall$, $\exists$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ hors des formules mathématiques ;
- Veiller à l'orthographe et à la grammaire.

Règle 3 : un texte mathématique est un texte (2)

Exemple : *:-(*

- f est une fonction continue...
- $\forall x \in \mathbb{R}$, soit $n_x \in \mathbb{Z}$ l'unique entier tel que $n_x \leq x < n_x + 1$.

Exemple : *:-)*

- La fonction f est continue...
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ quelconque, soit $n_x \in \mathbb{Z}$ l'unique entier tel que $n_x \leq x < n_x + 1$.

Règle 4 : ni trop, ni trop peu

La rédaction dépend de son niveau d'étude :

- il est inutile de consacrer des pages (surtout en examen) à la preuve d'un résultat qui fait partie des acquis des années précédentes ;
- à l'opposé, il est téméraire de tronquer un calcul ou une démonstration pour arriver de façon « magique » au résultat, quand il s'agit justement des connaissances nouvelles sur lesquelles porte l'évaluation.

La rédaction doit être concise, mais n'oublier aucun des arguments nécessaires.

Règle 4 : ni trop, ni trop peu (2)

Fondamental

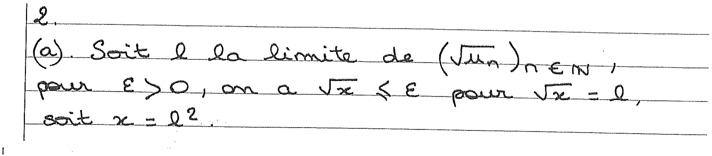
Il faut convaincre le lecteur que le calcul ou que la démonstration est juste... et que celui qui rédige sait pourquoi !

Conseil : *Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours*

Il ne faut pas hésiter à enrichir le texte d'un dessin, comme le graphe d'une fonction ou une figure géométrique, qui clarifie le raisonnement même s'il ne lui est pas indispensable.

Conclusion

Question 2. a) : Soit $\varepsilon > 0$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$ a-t-on $\sqrt{x} \leq \varepsilon$?



2.
(a). Soit ℓ la limite de $(\sqrt{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$,
pour $\varepsilon > 0$, on a $\sqrt{x} \leqslant \varepsilon$ pour $\sqrt{x} = \ell$,
soit $x = \ell^2$.

Figure: Réponse d'un étudiant

« Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, »

« Et les mots pour le dire arrivent aisément. » (Boileau, Art poétique).

Plan détaillé : Écrire des mathématiques

1. Écrire des mathématiques
   - La structure d'un texte mathématique
   - Symboles mathématiques (1)

Exemples

	$\forall$		$=$				$\times$	ϵ
$\cup$				π		$\leq$		A
α		$\sin$			$\mathbb{R}$		e	
			$\mathbb{N}$			x		
	$\in$				$\int$	$+$		0
$\sqrt{}$			$\coprod$				δ	
		f		$\exists$		$\sum$		-1

Lettres grecques

Lettres grecques usuelles

α alpha	β bêta	γ, Γ gamma	ρ rhô	δ, Δ delta	σ, Σ sigma
ε epsilon	τ tau	π, Π pi	ξ ksi	φ, Φ phi	λ, Λ lambda
μ mu	ν nu	ω, Ω oméga	χ khi	ψ, Ψ psi	θ, Θ thêta

Constantes et variables

Définition : *Constantes*

Les objets mathématiques d'usage fréquent ont un nom et une notation : $\forall, e, \pi, \sqrt{\ }, \sin, \sum, \mathbb{N}, =, \ldots$ Ce sont les « constantes ».

Ces constantes permettent de manipuler facilement les divers objets mathématiques sans devoir revenir à la définition précise ni en faire une description longue et compliquée.

Constantes et variables (2)

Définition : *Variables*

Si l'on veut utiliser un objet non spécifié, on va le désigner par une « variable » :

– Soit a un réel quelconque
– Soit φ une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
– Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$

Attention : *Domaine d'une variable*

Dans un autre chapitre, a peut désigner un point du plan et φ un nombre réel.
Suivant le contexte, le « domaine » de la variable peut changer !
Il faut donc toujours indiquer le domaine de la variable ou s'assurer que le contexte est suffisamment clair.

Somme

Exemple : *Un problème de notation*

Comment écrire de façon formelle la somme des 500 premiers impairs ?

- il y a trop de termes pour une écriture exhaustive ;
- une expression de la forme $1 + 3 + \cdots + 999$ est ambiguë.

Somme (2)

Solution

$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = 250000$$

- Le symbole « $\sum$ » indique que l'opération effectuée est une somme ;
- p est la variable de sommation ; elle prend toutes les valeurs entières de 0 à 499 ; c'est une « variable muette » ;
- Le « terme général » de la somme est $2p+1$.

Somme (3)

Conseil

Lorsqu'on utilise la notation $\sum$, il faut toujours vérifier les bornes de la somme qui sont source de nombreuses erreurs. Il est souvent utile de développer partiellement la somme et d'en écrire les premiers et derniers termes :

$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = \underbrace{1}_{2*0+1} + \underbrace{3}_{2*1+1} + \underbrace{5}_{2*2+1} + \cdots + \underbrace{997}_{2*498+1} + \underbrace{999}_{2*499+1}$$

Somme (4)

Syntaxe : *Formulation générale*
Soit $(a_p, p \geq 0)$ une suite de nombres ; soit k et l deux entiers tels que $k \leq l$; alors

$$\sum_{p=k}^{l} a_p = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{l-1} + a_l$$

Somme (5)

Propriété

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda &= n\lambda \\ \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \\ \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

où $n \geq 1$ est un entier et les a_k, b_k, λ sont des nombres réels.

Somme (6)

Attention

Il faut bien préciser sur quels éléments porte le symbole $\sum$. En cas de doute, il vaut mieux mettre des parenthèses.

Exemple

$$\left(\sum_{i=1}^{10} 2i\right) + 1 = \sum_{i=1}^{10} 2i + 1 \neq \sum_{i=1}^{10} (2i+1)$$

Changement d'indices

Exemple

Dans ce qui précède, on a écrit les entiers impairs sous la forme $2p+1$, pour p allant de 0 à 499. Or l'on peut très bien écrire les 500 premiers entiers impairs sous la forme $2k-1$, où k prend toutes les valeurs entières de 1 à 500. On a en effet

$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = \sum_{k=1}^{500}(2k-1)$$

et la relation entre p et k s'écrit $p = k-1$. On vérifie facilement que $2p+1 = 2(k-1)+1 = 2k-1$; quand $p = 0$, on a $k = 1$ et pour $p = 499$, $k = 500$.

Changement d'indices (2)

Méthode

De façon générale, lorsque l'on remplace la variable muette dans une expression, il faut changer toutes les occurrences et les bornes, c'est-à-dire le début et la fin de la somme. Comme la variable est souvent notée en indice, on parle de « changement d'indices ».

Conseil : *Bis repetita*

Il est très facile de se tromper en effectuant un changement d'indices. Pour limiter le risque d'erreur, il est vivement recommandé d'en vérifier l'exactitude en développant partiellement la somme, en particulier les premiers termes et les derniers.

Changement d'indices (3)

Exemple

– On a

$$\sum_{i=1}^{10} i = \sum_{p=0}^{9}(p+1) = \sum_{k=2}^{11}(k-1) = \sum_{i=-1}^{8}(i+2)$$

– Notons $v_k = \frac{1}{2k-1}$; alors :

$$\sum_{k=4}^{8} \frac{1}{2k-7} = \sum_{k=4}^{8} \frac{1}{2(k-3)-1} = \sum_{k=4}^{8} v_{k-3} = \sum_{k=1}^{5} v_k$$

Produits

Syntaxe : *Formulation générale*
Soit $(a_p, p \geq 0)$ une suite de nombres ; soit k et l deux entiers tels que $k \leq l$; alors

$$\prod_{p=k}^{l} a_p = a_k \times a_{k+1} \times \cdots \times a_{l-1} \times a_l$$

Exemple : *Factorielle d'un nombre entier*

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Produits (2)

Remarque

Par convention, un produit indexé par l'ensemble vide est égal à 1. Exemple :

$$0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1.$$

Produits (3)

Propriété

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\lambda &= \lambda^n\\ \prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) &= \lambda^n\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k\\ \prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) &= \left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)\end{aligned}$$

où $n \geq 1$ est un entier et les a_k, b_k,λ sont des nombres réels.

Sommes classiques

Suites puissances

$a_k = k^p$, où p est un entier :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Sommes classiques (2)

Suites géométriques

$a_k = \alpha^k$, où α est un réel :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ n+1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Plus généralement :

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha^k = \alpha^m \sum_{k=0}^{n-m} \alpha^k = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^m}{\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Sommes classiques (3)

Différence de puissances

n est un entier et a, b des réels :

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a-b)\textstyle\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \end{aligned}$$

Sommes classiques (4)

Formule du binôme

n, k sont des entiers :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,,$$

avec

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))(n-k+1)}{k!} \,.$$

Plan

Introduction

Au programme de la deuxième séance :

- **Propositions**
- **Les ensembles : définition, propriétés**

Plan détaillé : Propositions. Ensembles. Éléments

2 Propositions. Ensembles. Éléments

- Le langage des propositions
- Les ensembles

Introduction

Les propositions sont à la base des énoncés mathématiques

Principe d'exclusion

Fondamental

En mathématiques, une proposition est soit vraie, soit fausse.

Négation d'une proposition

Dans le langage courant ainsi qu'en mathématiques, on utilise souvent la négation d'une affirmation. C'est une opération logique très simple : à partir d'une proposition P on obtient une nouvelle proposition qui est sa négation.

Définition : *Négation d'une proposition*
La négation de la proposition P est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. On la note $(non\, P)$

Exemple

- La négation de l'assertion fausse « 6 est un nombre impair » peut s'énoncer « 6 est un nombre pair » ;
- L'assertion « 6 est divisible par 3 » a comme négation « 6 n'est pas divisible par 3 » ; ici la négation est fausse.

Négation d'une proposition (2)

Syntaxe

Soit P une proposition ou assertion, alors on note « $\mathrm{non}\, P$ » sa négation. Suivant les ouvrages, on peut aussi trouver les notations suivantes pour désigner la négation de P : « $\neg P$ » ou « $\sim P$ ».

Négation d'une proposition (3)

Une conséquence du principe d'exclusion, énoncé plus haut, est la propriété fondamentale suivante :

Fondamental

- Soit l'assertion P est vraie ;
- sinon, c'est sa négation $\mathrm{non}\, P$ qui est vraie.

Cette propriété est formalisée dans la table de vérité de la négation.

Négation d'une proposition (4)

Définition : *Table de vérité*

Une *table de vérité* est un tableau représentant en colonne les valeurs de vérité prises par des propositions (en "sortie", à la droite du tableau) en fonction des valeurs de vérité prises par d'autres propositions (en "entrée", à gauche du tableau) :

$E1$	$E2$	$\cdots$		$S1$	$S2$	$\cdots$
V	V			V	F	
V	F			F	F	
F	V			F	V	
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	

Exemple

La table de vérité de la négation caractérise cette opération logique :

P		non P
V		F
F		V

Propositions composées

Définition

À partir de deux propositions, P et Q, on obtient les propositions composées fondamentales suivantes :

- la **conjonction** "$P\,\mathrm{et}\,Q$" ;
- la **disjonction** "$P\,\mathrm{ou}\,Q$" ;
- l'**implication** "$P \Longrightarrow Q$" ;
- l'**équivalence** "$P \Longleftrightarrow Q$".

Comme une assertion est soit vraie, soit fausse, le résultat des compositions est aussi soit vrai, soit faux.

Remarque

Afin d'éviter les imprécisions du langage courant, on va définir dans la suite ces quatre propositions composées grâce aux tables de vérité.

Conjonction et disjonction

Définition

Soient P et Q deux propositions. La **conjonction** (le **« et »** logique) et la **disjonction** (le **« ou »** logique) sont définies grâce à la table de vérité suivante :

P	Q		P et Q	P ou Q
V	V		V	V
V	F		F	V
F	V		F	V
F	F		F	F

Les deux premières colonnes de ce tableau représentent les 2*2 possibilités que l'on a pour les valeurs de vérité combinées de P et Q.

Conjonction et disjonction (2)

Remarque

1. Ne pas confondre les **« et »** et **« ou »** logiques avec le sens de « et » et « ou » dans le langage courant.
2. La disjonction est non exclusive, c'est-à-dire qu'elle est aussi vraie si les deux propositions sont vraies.
3. La conjonction est seulement vraie si les deux propositions sont vraies.

Syntaxe

– Dans certains textes, l'opération logique « et » est notée grâce au symbole « $\wedge$ ». En informatique, on utilise souvent « & ».

– Pour la disjonction « ou », on peut trouver le symbole « $\vee$ » et en informatique « $|$ ».

Conjonction et disjonction (3)

Propriété : *Distributivité*

- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ est équivalent à $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$;
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ est équivalent à $(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$.

Implication et équivalence

Définition

Soient P et Q deux propositions. On définit l'**implication**, notée $P \Rightarrow Q$, et l'**équivalence**, notée $P \Leftrightarrow Q$ grâce à la table de vérité suivante :

P	Q		$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V		V	V
V	F		F	F
F	V		V	F
F	F		V	V

- La proposition composée $P \Rightarrow Q$ se lit « P entraîne Q » ou « si P, alors Q ».
- La proposition composée $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P est équivalent à Q » ou « P est vrai si et seulement si Q est vrai ».

Implication et équivalence (2)

Remarque

1. Ne pas confondre avec la façon dont on utilise « entraîne » et « équivalent » dans le langage courant.
2. Une implication est fausse seulement si une affirmation vraie implique une affirmation fausse.
3. Si P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est toujours vrai, indépendamment de Q.
4. Si $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors P est vrai seulement si Q est vrai.
   On dit encore que Q est une **condition nécessaire** pour P.
5. Si Q est vrai, alors $P \Rightarrow Q$ est toujours vrai, indépendamment de P.
   On dit encore que P est une **condition suffisante** pour Q.
6. L'équivalence est vraie seulement si les deux propositions P et Q ont même valeur de vérité.

Implication et équivalence (3)

Exercice

Construire la table de vérité de la proposition composée $(P \Rightarrow Q)\,\mathrm{et}\,(Q \Rightarrow P)$.
Vérifier que c'est la même que la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.
Pour cette raison, on dit aussi que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q quand $P \Leftrightarrow Q$.

Propositions et variables

Pour énoncer de façon concise une proposition portant sur plusieurs objets mathématiques à la fois ou dont on ne connaît pas précisément la valeur, on utilise des variables.

Exemple

– La proposition « L'entier n est divisible par 2 » est fausse si n est un entier impair mais vraie si n est pair.
– La proposition « $u + 3 = \frac{1}{2}$ » est vraie seulement si u est égal au nombre rationnel négatif $-\frac{5}{2}$.
– L'assertion « $f(x+1) = f(x)$ » n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse. Il faut préciser pour quelles valeurs du nombre x et pour quelles fonctions f on considère l'assertion.
– La proposition « $\exists y \in \mathbb{Z}, \quad |x - y| < 1$ » n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse. Il faut préciser pour quelles valeurs de la variable x on la considère.

Plan détaillé : Propositions. Ensembles. Éléments

Introduction

La théorie des ensembles est née à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle à la suite des travaux du mathématicien Georg Cantor. Elle a apporté de nouvelles fondations aux mathématiques et clarifié la notion d'infini. Dans ce chapitre, nous n'allons pas présenter ses résultats, mais plutôt son vocabulaire qui est devenu une langue commune à tous les mathématiciens.

Définition et exemples

Définition : *Ensembles et éléments*

Un **ensemble** est une collection d'objets qui sont appelés ses **éléments**. Ces éléments peuvent être de tous types : nombres, figures géométriques, solutions d'une équation différentielle, ensembles...

Syntaxe

La propriété « x est élément de E » se note

$$x \in E$$

On dit aussi que « x appartient à E ». La négation se note

$$x \notin E$$

Définition et exemples (2)

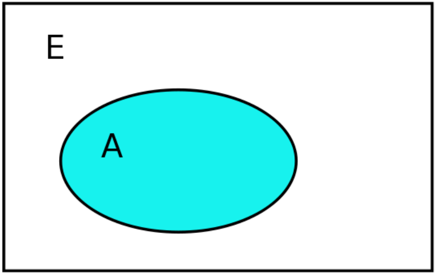
Exemple : *Quelques ensembles bien connus*

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls)
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, certainement l'ensemble le plus compliqué à décrire... Si riche soit-il, $\mathbb{Q}$ ne permet pas de décrire l'ensemble des quantités qui apparaissent en mathématiques, comme $\sqrt{2}$ ou π. L'ensemble des réels a donc été introduit pour permettre l'expression de telles quantités. On peut dire qu'il complète $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et i imaginaire pur vérifiant $i^2 = -1$

Partie d'un ensemble

Définition : *Sous-ensemble*

Un **sous-ensemble** ou une **partie** d'un ensemble E est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à E.



Partie d'un ensemble (2)

FIGURE: Partie A dans E

Partie d'un ensemble (3)

Syntaxe : *Inclusion*

- La propriété « A est un sous-ensemble de E » se note $A \subset E$. On dit aussi que « A est inclus dans E ».
- La négation se note $A \not\subset E$.

Formellement :

$$A \subset E \text{ si et seulement si } (\forall x \in A)(x \in E)$$

Exemple

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$
- $\{(1, 2)\} \not\subset \{(0, 1), (2, 3)\}$

Remarque

Il faut noter que l'inclusion n'exclut pas l'appartenance. Par exemple, $\{0\}$ est à la fois un élément et une partie de $\{0, \{0\}\}$.

Définir un ensemble

Pour décrire un ensemble ou un sous-ensemble, on peut établir la liste de ses éléments. On dit alors que l'ensemble est **défini en extension**. Ce n'est possible que pour des ensembles finis.

Syntaxe

Les notations

$$\{1,2,3\}\,,\quad \{3,2,1\}\ \text{ et }\ \{1,1,2,3\}$$

décrivent toutes trois l'ensemble qui contient les trois éléments 1, 2 et 3. L'ordre d'écriture des éléments n'a pas d'importance et l'usage est d'éviter les répétitions.

Exemple

– Ensemble des valeurs faciales des billets d'euro :
$\{5, 10, 20, 50, 100, 200, 500\}$

Définir un ensemble (2)

- Ensemble des racines cubiques de l'unité : $\left\{1, j, j^2\right\}$
- Ensemble des chiffres pairs : $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Définir un ensemble (3)

Un ensemble A peut être aussi défini par un **paramétrage**, c'est-à-dire comme l'image d'un ensemble connu B par une fonction f (cf le chapitre correspondant) :

$$A = \{f(x), x \in B\}$$

Exemple

- Ensemble des racines cubiques de l'unité : $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}\right\}$
- Ensembles des entiers naturels pairs : $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$

Définir un ensemble (4)

Il est aussi possible de caractériser un ensemble A comme un sous-ensemble d'un ensemble connu E et par une propriété P vérifiée par ses éléments :

$$A = \{x \in E / P(x)\}$$

On dit alors que l'ensemble est **défini en compréhension**.

Exemple

- Ensemble des racines cubiques de l'unité : $\left\{z \in \mathbb{C} / z^3 = 1\right\}$
- Ensemble des entiers naturels pairs : $\{n \in \mathbb{N} / (\exists k \in \mathbb{N})(n = 2k)\}$
- $[0, 2] = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 2\}$

Ensemble des parties

Axiome : *Ensemble des parties*
L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$.
Autrement dit :

$$A \in \mathcal{P}(E) \text{ si et seulement si } A \subset E$$

Exemple : *Sous-ensembles élémentaires*
Quel que soit l'ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient donc toujours au moins deux éléments, sauf si $E = \emptyset$, auquel cas il n'en contient qu'un seul. En conséquence, il n'est jamais vide.

Propriété
Soit E un ensemble.

- Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est toujours strictement plus grand que le cardinal de E.
- Si E est de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n.

Égalité de deux ensembles

Définition : *Égalité*

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments. Formellement :

$$E = F \text{ si et seulement si } (\forall x)(x \in E \iff x \in F)$$

Méthode

De la même façon que l'équivalence correspond à une double implication, l'égalité de deux ensembles est équivalente à une double inclusion : $E = F \iff (E \subset F) \text{ et } (F \subset E)$.
Pour démontrer une telle égalité, on peut donc procéder en deux étapes : montrer la première inclusion, puis la seconde.

Opération sur les ensembles

À partir d'un ou de plusieurs ensembles, il est possible d'en construire de nouveaux :

- l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou à l'autre ;
- l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux ;
- l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un mais pas à l'autre ;
- etc.

On regroupe ces procédés sous le terme générique d'**opérations**. Cette section est consacrée à leur description.

Réunion de deux ensembles

Définition : *Réunion*

Soit A et B deux ensembles. La réunion de A et B est l'ensemble constitué des éléments appartenant à A ou à B (éventuellement aux deux). On le note $A \cup B$.
Autrement dit : quel que soit x,

$$x \in A \cup B \text{ si et seulement si } x \in A \text{ ou } x \in B$$

Réunion de deux ensembles (2)

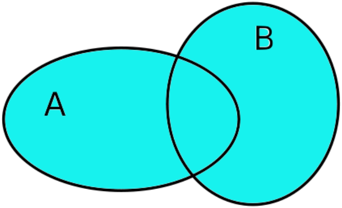


FIGURE: Réunion de deux ensembles

Intersection de deux ensembles

Définition : *Intersection*
Soit A et B deux ensembles. L'intersection de A et B est l'ensemble constitué des éléments appartenant à A et à B. On le note $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in A / x \in B\} = \{x \in B / x \in A\}$$

Autrement dit : quel que soit x,

$$x \in A \cap B \text{ si et seulement si } x \in A \text{ et } x \in B.$$

Intersection de deux ensembles (2)

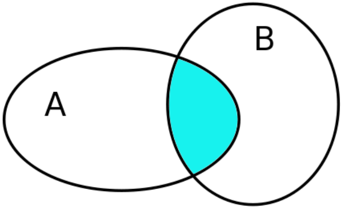


FIGURE: Intersection de deux ensembles

Différences

Définition : *Différence de deux ensembles*
Soit A et B deux ensembles. La différence de A avec B est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

$$A \setminus B = \{x \in A / x \notin B\}$$

Différences (2)

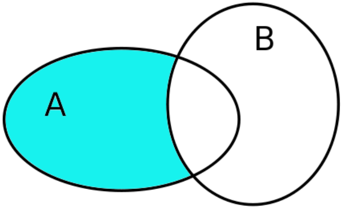


FIGURE: Différence de deux ensembles

Complémentaire d'un ensemble

Définition : *Complémentaire*
La différence d'un ensemble E avec l'une de ses parties A est appelée « complémentaire de A dans E » :

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$$

Complémentaire d'un ensemble (2)

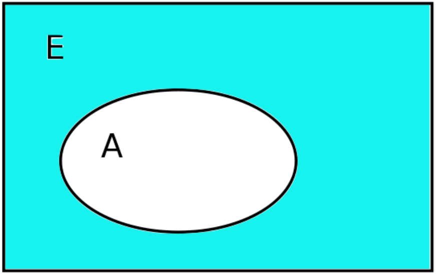


FIGURE: Complémentaire de A dans E

Connecteurs logiques et opérations ensemblistes

Il y a une correspondance remarquable entre le langage utilisé pour la théorie des ensembles et celui de la logique. On peut la résumer ainsi :

Fondamental

- $\subset$ et $\Longrightarrow$: $A \subset B$ si et seulement si $(\forall x \in E)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$
- $=$ et $\Longleftrightarrow$: $A = B$ si et seulement si $(\forall x \in E)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$
- $\complement_E$ et « non » : $(\forall x \in E)(x \in \complement_E A$ si et seulement si non$(x \in A))$
- $\cup$ et « ou » : $(\forall x \in E)(x \in A \cup B$ si et seulement si $(x \in A$ ou $x \in B))$
- $\cap$ et « et » : $(\forall x \in E)(x \in A \cap B$ si et seulement si $(x \in A$ et $x \in B))$

où A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Connecteurs logiques et opérations ensemblistes (2)

Exercice

Soit P et Q deux propositions mathématiques, A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Déterminer la table de vérité de la proposition $(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (P \text{ et } Q)$.
2. En déduire $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.