UNIVERSITÉ
PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

(ma)Thématiques de pré-rentrée

Université Paris Descartes

2012

Table des matières

1 Langage mathématique **1**

Introduction 1

1.1 Cours 2

1.1.1 Langage 2

1.1.2 Symboles et variables 2

1.1.3 Lettres grecques 3

1.1.4 Proposition 3

1.1.4.1 Le langage des propositions 3

1.1.4.2 Négation d'une proposition 4

1.1.4.3 Propositions composées 5

1.1.4.4 Conjonction et disjonction 5

1.1.4.5 Implication et équivalence 6

1.1.4.6 Propositions et variables 6

1.1.5 Quantification 7

1.1.5.1 Quantificateurs 7

1.1.5.2 Quantificateurs successifs 8

1.1.6 Sommes et produits 9

1.1.6.1 Somme 9

1.1.6.2 Changement d'indice 11

1.1.6.3 Produits 11

1.1.6.4 Sommes classiques 12

1.1.7 Langage formel et métalangage 13

1.2 Exercices 13

1.2.1 Négation de propositions 13
1.2.2 Quantificateurs 14
1.2.3 Quantificateurs 14
1.2.4 Calcul de sommes 14
1.2.5 Calcul de sommes 14
1.2.6 Calcul de sommes 15
1.2.7 Factorielles 15
1.2.8 Calcul de produits 15
1.2.9 Calcul de sommes avec deux indices 15

2 Ensembles et éléments **17**

Introduction 17
2.1 Cours 17
2.1.1 Définition et exemples 17
2.1.2 Sous-ensembles 18
2.1.2.1 Partie d'un ensemble 18
2.1.2.2 Définir un ensemble 19
2.1.2.3 Ensemble des parties 20
2.1.2.4 Inclusion et implication 20
2.1.2.5 Égalité de deux ensembles 21
2.1.3 Opérations sur les ensembles 21
Introduction 21
2.1.3.1 Réunion de deux ensembles 21
2.1.3.2 Intersection de deux ensembles 22
2.1.3.3 Différences 23
2.1.3.4 Complémentaire d'un ensemble 25
2.1.3.5 Relations croisées 25

2.1.3.6 Résumé des correspondances entre logique et théorie des ensembles . . . 26

2.1.4 Produit cartésien . . . 28

2.2 Exercices . . . 29

2.2.1 Réunion, intersection et différence . . . 29

2.2.2 Ensemble des parties . . . 29

2.2.3 Cardinal d'une réunion et d'une intersection . . . 29

2.2.4 Égalité de deux ensembles . . . 29

2.2.5 Ensembles plans . . . 30

2.2.6 Inclusion stricte . . . 30

2.2.7 Lois de Morgan . . . 30

2.2.8 Opération sur les ensembles . . . 30

2.2.9 Équation ensembliste . . . 31

2.2.10 Calcul ensembliste . . . 32

Bibliographie **33**

1

Langage mathématique

Introduction

Par « langage mathématique » , on entend précisément le langage formel écrit avec l'ensemble des symboles propres aux mathématiques. Il ne constitue qu'une partie, très utile mais le plus souvent assez réduite, d'un texte mathématique rédigé principalement dans la langue commune mais avec un vocabulaire spécifique.

Ce premier chapitre va introduire une partie du vocabulaire et des symboles qui seront utilisés dans les cours de mathématiques. Nous aborderons les notions suivantes :

- **Symboles et variables** : qui permettent de décrire et manipuler les objets mathématiques
- **Propositions** : qui sont les éléments de base des énoncés mathématiques
  - Négation
  - Conjonction ("et") et disjonction ("ou")
  - Implication et équivalence
- **Quantification** : le "pour tout" $\forall$ et le "il existe" $\exists$
- **Sommes et produits** : écriture et premières manipulations

Quelques références :

- À la bibliothèque :
  - Maths - Visa pour la licence.[1] Chapitre 1 : Vocabulaire et notations des ensembles.
  - MéthodiX, de la Terminale à la Prépa.[2] Chapitre 4 : Propositions.
  - Objectif Prepa Maths[3]. Chapitres 1 et 4.
- Sur le web :
  - Logique et langage des ensembles[4], Université en Ligne, chapitre Rédaction
  - Bases, Mathématiques[5] , chapitre Logique
  - Langage mathématique[6], M@ths en Ligne, chapitres Assertions et Quantificateurs
  - Language, notation and formulas[7], OpenLearn (en anglais)

1.1 Cours

1.1.1 Langage

Afin de comprendre un énoncé, de bien rédiger un calcul ou une démonstration, il est essentiel d'être conscient de la signification précise du vocabulaire utilisé en mathématiques.

Attention
Insistons sur les différences avec le langage courant :

- Il faut se méfier des "faux-amis", comme dans l'étude des langues étrangères.
  Un nombre "complexe" n'est pas plus compliqué qu'un nombre "entier", un nombre "réel" n'est pas plus réel qu'un nombre "imaginaire".
  Ce sont des **objets mathématiques** ayant une définition précise.
- Le langage courant est moins précis que le langage mathématique.
  La phrase "en hiver il fait froid" n'a pas de valeur scientifique : il faut donner une définition de "froid" et préciser si l'on fait une moyenne sur les jours, ou si l'on prend les valeurs extrêmes de température, et ainsi de suite.
- Les mots "et", "ou", "si", "alors" ont un sens précis que nous verrons plus loin. De façon générale, les raisonnements "logiques" de la vie quotidienne ne sont pas les **opérations logiques** utilisées en mathématiques.

Complément
Un texte mathématique ne contient pas que du **langage mathématique formel**.

On utilise le langage commun pour relier des parties de démonstrations, expliquer les calculs à venir, commenter un résultat, faire des rappels, signaler un lien, et ainsi de suite.

En aucun cas il ne faut remplir des pages entières de démonstrations formelles ou de calculs sans aucun texte pour guider le lecteur.

1.1.2 Symboles et variables

En mathématiques, on est amené à manipuler des objets de nature très différente. Il est impossible de les lister tous. On rencontre des nombres comme "2", "-1", "0,125", "1/8", "$\sqrt{2}$" ; des fonctions comme la fonction "racine carrée" ou la fonction "tangente" ; des objets géométriques comme un "cercle de centre l'origine et de rayon 1", etc.

Syntaxe
Certains objets qui sont d'usage fréquent, ont un nom. Ainsi "e" et "π" désignent des nombres célèbres, utilisés dans tous les domaines des mathématiques.

La fonction racine carrée est notée "$\sqrt{\cdot}$" et la fonction tangente "$\tan(\cdot)$".

Ces **symboles** permettent de manipuler facilement les divers objets mathématiques sans devoir revenir à la définition précise ni en faire une description longue et compliquée.

Syntaxe
Si l'on veut utiliser un objet non spécifié, on va le désigner par une **variable**. On parle ainsi du nombre "x" et de la fonction "f". Mais attention, dans un autre chapitre "x" peut désigner un point du plan et f un nombre réel.

Suivant le contexte, le **domaine** de la variable peut changer !

Il est donc très important d'indiquer le domaine de la variable ou de s'assurer que le contexte est suffisamment clair.

1.1.3 Lettres grecques

Syntaxe
Pour désigner les variables, on utilise souvent les lettres de l'alphabet latin ($a/A/\mathcal{A}$, $b/B/\mathcal{B}$,..., $z/Z/\mathcal{Z}$).

Mais l'alphabet grec sert aussi. Ci-dessous, on rappelle quelques-unes des lettres grecques (minuscules/majuscules) les plus utilisées :

Syntaxe

α alpha	β bêta	γ, Γ gamma	ρ rhô	δ, Δ delta	σ, Σ sigma
ε epsilon	τ tau	π, Π pi	ξ ksi	φ, Φ phi	λ, Λ lambda
μ mu	ν nu	ω, Ω oméga	χ khi	ψ, Ψ psi	θ, Θ thêta

Conseil
Traditionnellement, certaines lettres sont utilisées dans un contexte précis :
- ε désigne souvent une quantité petite ;
- δ, Δ désignent des variations ;
- θ est souvent une mesure d'angle ;
- z est utilisé pour un nombre complexe.

Il faut néanmoins se méfier et toujours vérifier la signification des lettres grâce au contexte et aux indications.

1.1.4 Proposition

1.1.4.1 Le langage des propositions

Définition 1.1
Une **proposition** est une affirmation (on dit aussi **assertion**). On note souvent P une telle proposition.

Exemple
- Tous les entiers relatifs sont des nombres réels.
- Il fait froid en hiver.

Règle 1.2 : Principe d'exclusion
En mathématiques, une proposition est soit vraie, soit fausse.

Exemple
- La proposition "il fait froid en hiver" est fausse. Formulée en langage mathématiques cette phrase devient "tous les jours de l'hiver sont froids", ce qui est donc faux puisqu'il existe des jours d'hiver doux.
- La proposition "Les entiers multiples de 6 sont des multiples de 2" est vraie.
- La proposition "Les entiers multiples de 6 sont les multiples de 2" est fausse.

Définition 1.3 : Valeur de vérité
Les deux valeurs possibles d'une assertion sont appelées **valeurs de vérité** ; elles sont souvent notées V pour VRAI et F pour FAUX.

1.1.4.2 Négation d'une proposition

Dans le langage courant ainsi qu'en mathématiques, on utilise souvent la négation d'une affirmation. Une conséquence du principe d'exclusion, énoncé plus haut, est la proposition fondamentale suivante :

Fondamental
Si l'assertion P est vraie, alors sa négation est fausse ; si P est fausse, alors c'est sa négation qui est vraie.

Exemple

– La négation de l'assertion fausse "6 est un nombre impair" peut s'énoncer "6 est un nombre pair" ;

– L'assertion "6 est divisible par 3" a comme négation "6 n'est pas divisible par 3" ; ici la négation est fausse.

Syntaxe
Soit P une proposition ou assertion, alors on note "$non\, P$" sa négation.

Suivant les ouvrages, on peut aussi trouver les notations suivantes pour désigner la négation de P : "$\neg P$" ou "$\sim P$".

Définition 1.4 : Table de vérité
Une « table de vérité » est un tableau représentant en colonne les valeurs de vérité prises par des propositions (en "sortie", à la droite du tableau) en fonction des valeurs de vérité prises par d'autres propositions (en "entrée", à gauche du tableau) :

$E1$	$E2$	$\cdots$		$S1$	$S2$	$\cdots$
V	V			V	F	
V	F			F	F	
F	V			F	V	
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	

Exemple
La table de vérité de la négation caractérise cette opération logique :

P		$non\, P$
V		F
F		V

Remarque

1. La négation est une opération logique très simple, à partir d'une proposition P on obtient une nouvelle proposition $Q = non\, P$.
2. On verra plus loin que la négation d'une proposition composée ou qui contient des quantificateurs peut être assez délicate.
3. On verra dans le chapitre "Principe du raisonnement mathématique" des applications de la négation lors de démonstrations.

1.1.4.3 Propositions composées

Définition 1.5
À partir de deux propositions, P et Q, on obtient les propositions composées fondamentales suivantes :

- la **conjonction** "P et Q" ;
- la **disjonction** "P ou Q" ;
- l'**implication** "$P \Longrightarrow Q$" ;
- l'**équivalence** "$P \Longleftrightarrow Q$".

Comme une assertion est soit vraie, soit fausse, le résultat des compositions est aussi soit vrai, soit faux.

Remarque

- Afin d'éviter les imprécisions du langage courant, on va définir dans la suite ces quatre propositions composées grâce aux tables de vérité.
- On reviendra dans le chapitre "Principe du raisonnement mathématique" sur ces propositions. On verra en particulier leur négation et leur utilisation correcte dans les démonstrations.

1.1.4.4 Conjonction et disjonction

Définition 1.6
Soient P et Q deux propositions. La **conjonction** (le "**et**" logique) et la **disjonction** (le "**ou**" logique) sont définies grâce à la table de vérité suivante :

P	Q		P et Q	P ou Q
V	V		V	V
V	F		F	V
F	V		F	V
F	F		F	F

Les deux premières colonnes de ce tableau représentent les 2*2 possibilités que l'on a pour les valeurs de vérité combinées de P et Q.

Remarque

1. Ne pas confondre les "**et**" et "**ou**" logiques avec le sens de "et" et "ou" dans le langage courant.
2. La disjonction est non exclusive, c'est-à-dire qu'elle est aussi vraie si les deux propositions sont vraies.
3. La conjonction est seulement vraie si les deux propositions sont vraies.

Syntaxe

- Dans certains textes, l'opération logique "et" est notée grâce au symbole "$\wedge$". En informatique, on utilise souvent "&".
- Pour la disjonction "ou", on peut trouver le symbole "$\vee$" et en informatique "|".

1.1.4.5 Implication et équivalence

Définition 1.7
Soient P et Q deux propositions. On définit l'**implication**, notée $P \Rightarrow Q$, et l'**équivalence**, notée $P \Leftrightarrow Q$ grâce à la table de vérité suivante :

P	Q		$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V		V	V
V	F		F	F
F	V		V	F
F	F		V	V

– La proposition composée "$P \Rightarrow Q$" se lit "P entraîne Q" ou "si P, alors Q".
– La proposition composée "$P \Leftrightarrow Q$" se lit "P est équivalent à Q" ou "P est vrai si et seulement si Q est vrai".

Remarque
1. Ne pas confondre avec la façon dont on utilise "entraîne" et "équivalent" dans le langage courant.
2. Une implication est fausse seulement si une affirmation vraie implique une affirmation fausse.
3. Si P est faux, alors "$P \Rightarrow Q$" est toujours vrai, indépendamment de Q.
4. Si $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors "P" est vrai seulement si Q est vrai.
   On dit encore que "Q est une **condition nécessaire** pour P".
5. Si Q est vrai, alors "$P \Rightarrow Q$" est toujours vrai, indépendamment de P.
   On dit encore que "P est une **condition suffisante** pour Q".
6. L'équivalence est vraie seulement si les deux propositions P et Q ont même valeur de vérité.

Complément : Exercice
Construire la table de vérité de la proposition composée "$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$". Vérifier que c'est la même que la table de vérité de "$P \Leftrightarrow Q$".

Pour cette raison, on dit aussi que "P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q" quand "$P \Leftrightarrow Q$".

1.1.4.6 Propositions et variables

On a vu comment l'on compose des propositions en mathématiques, on va maintenant voir comment énoncer de façon précise une proposition. Pour cela, on est souvent amené à utiliser des variables. Elles permettent d'exprimer de façon concise des propriétés et des résultats qui sont souvent difficiles à décrire précisément dans le langage de tous les jours. On a vu que l'assertion (imprécise) "il fait froid en hiver" est formulée en langage mathématique par "tous les jours de l'hiver sont froids" où l'on introduit les "jours" comme variables pour formaliser la phrase initiale.
Dans la suite, on s'intéresse à l'utilisation de variables dans les énoncés mathématiques.

Exemple

- La proposition "l'entier n est divisible par 2" est fausse si n est un entier impair mais vraie si n est pair.
- La proposition "$u + 3 = \frac{1}{2}$" est seulement vraie si u est égal au nombre rationnel négatif $-\frac{5}{2}$.
- L'assertion "$f(x + 1) = f(x)$" n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse. Il faut préciser pour quelles valeurs du nombre x et pour quelles fonctions f on considère l'assertion.

Syntaxe

Pour simplifier l'écriture et l'utilisation d'une proposition, on peut lui donner un nom et exprimer uniquement les variables dont elle dépend.

- Ainsi la proposition "l'entier n est divisible par 2" peut s'écrire $P(n)$.
- L'assertion "$|x-y| < \varepsilon$" dépend de trois variables et l'on pourra écrire $I(x, y, \varepsilon)$. Suivant les valeurs de nombres réels x, y et ε, la proposition $I(x, y, \varepsilon)$ sera vraie ou fausse.
- Si $Q(n)$="$0 \leq n \leq 100$", alors dire que "($P(n)$ et $Q(n)$) est vrai" revient à dire que n est un entier pair compris entre 0 et 100.

Remarque

Dans les exemples précédents, les variables sont **libres**. Si une proposition contient des variables libres, on ne peut pas décider si elle est vraie ou fausse. Il faut donc préciser (ou éliminer) les variables libres.

Méthode

Il y a deux façons de préciser les variables libres :

- on remplace la variable par une valeur particulière, c'est la **spécialisation** ;
- on va lier la variable grâce à la **quantification** : "**pour tout**" ou "**il existe**".

Exemple

On s'intéresse à la proposition "$x^2 = 2$" :

- La spécialisation "$(-1)^2 = 2$" est fausse, tandis que "$(-\sqrt{2})^2 = 2$" est vraie ;
- la proposition "pour tout réel x on a $x^2 = 2$" est fausse ;
- "il existe un réel x tel que $x^2 = 2$" est une assertion vraie ;
- "il existe un entier x tel que $x^2 = 2$" est fausse.

La quantification étant très fréquente en mathématiques, des symboles particuliers sont utilisés et présentés dans la suite.

1.1.5 Quantification

1.1.5.1 Quantificateurs

Définition 1.8 : Quantificateur universel

- $\forall$ signifie « quel que soit » ou « pour tout ».
- $\forall x \in E, P(x)$ ou $(\forall x \in E)\, P(x)$ signifie : pour tout élément x de E, la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple
La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 2 > 0$$

se lit : pour tout réel x, le réel $x^2 - 2x + 2$ est strictement positif. Cette proposition est vraie.

Définition 1.9 : Quantificateur existentiel

- $\exists$ signifie « il existe ».
- $\exists x \in E, P(x)$ ou $(\exists x \in E)\, P(x)$ signifie : il existe un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

Exemple
La proposition

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 = 0$$

se lit : il existe un réel x tel que le réel $x^2 - 2x + 2$ soit nul. Cette proposition est fausse.

Attention
Pour éviter des confusions, des parenthèses peuvent s'avérer indispensables. Ainsi la proposition :

$$\forall x \in A, x \in B \Rightarrow A = B$$

n'a pas le même sens selon que l'on place les parenthèses comme ici :

$$(\forall x \in A, x \in B) \Rightarrow A = B$$

ou comme là :

$$\forall x \in A, (x \in B \Rightarrow A = B)$$

Dans le premier cas, la proposition signifie :

$$A \subset B \Rightarrow A = B;$$

dans le deuxième cas, elle signifie :

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B.$$

1.1.5.2 Quantificateurs successifs

Exemple

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 - 2y + 2 > 0$: FAUX
- $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2y + 2 > 0$: FAUX
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 - 2y + 2 = 0$: VRAI
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2y + 2 = 0$: FAUX

Quantificateurs identiques

Fondamental
Lorsque une proposition est précédée de plusieurs quantificateurs de la **même nature**, on peut intervertir les quantifications sans changer la valeur de vérité de la proposition formée.

Exemple
- La proposition $\forall y < 1, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2y + 2 > 0$ est vraie.
- La proposition $\exists y < 1, \exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2y + 2 = 0$ est fausse.

Quantificateurs distincts

Fondamental
Lorsque une proposition est précédée de plusieurs quantificateurs de **nature différente**, l'ordre des quantificateurs ne peut en aucun cas être modifié.

Exemple
- La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y + 1 = 0$ est vraie.
- La proposition $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ x + y + 1 = 0$ est fausse.

1.1.6 Sommes et produits

1.1.6.1 Somme

Exemple
On considère la notation suivante "$3, 5, 7, \ldots$". Quel sens donner aux points de suspension "$\ldots$" ?
- Les nombres suivants dans la liste peuvent être "$9, 11, 13, 15$" ; dans ce cas on a commencé à écrire une suite arithmétique de raison 2.
- On peut aussi continuer avec "$11, 13, 17, 19$" ; ceci donne une liste des nombres premiers à partir de 3.

On peut trouver d'autres façons "logiques" de continuer la suite. Bien sûr, aucune réponse n'est préférable à une autre. Il faut donc toujours s'assurer que le contexte est suffisamment clair et permet d'éviter les ambiguïtés.

Considérons maintenant la proposition suivante "$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100$" . Vous pouvez facilement vérifier que cette affirmation est vraie. Ici il est clair que l'on fait la somme des neuf premiers entiers impairs, mais si l'on écrit "$1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 100$", le lecteur peut avoir un doute :

est-ce que l'on considère une somme de nombres premiers (plus le 1) ou une somme d'entiers impairs ?

Le problème est plus net encore si l'on fait la somme des cinq cents premiers nombres impairs : on est alors tenté d'écrire "$1 + 3 + \cdots + 999 = 250000$", mais comment s'assurer que le lecteur va comprendre ?

Méthode

Pour lever les ambiguïtés rencontrées, on a deux façons de procéder :

- on donne la suite de façon exhaustive (complète) ; c'est possible s'il n'y a pas beaucoup de termes ;
- on donne la règle de construction de la suite.

Syntaxe

Revenons à la somme des entiers impairs. Un entier impair peut s'écrire sous la forme "$2p+1$" où p est un entier quelconque ($p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$).

Pour faire la somme des cinq cents premiers nombres impairs, on va "faire la somme des entiers $2p+1$ pour p allant de 0 à 499 " . Mais au lieu d'écrire cette phrase, on va noter plus brièvement :

$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = 250000$$

- Le symbole $\sum$ est celui de la lettre grecque sigma majuscule ; il a été introduit par Euler au milieu de $18^{\text{ème}}$ siècle et indique que l'opération effectuée est une somme.
- p est la variable de sommation ; elle prend toutes les valeurs entières de 0 à 499 ; elle est dite **variable muette** car elle peut être remplacée par toute autre variable qui n'est pas utilisée ailleurs sans modifier la valeur de la somme :
$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = \sum_{k=0}^{499}(2k+1) = 250000.$$
- Le **terme général** est $2p+1$; afin de simplifier l'écriture, on peut donner un nom au terme général et uniquement exprimer sa dépendance de la variable ; la notation habituelle est de mettre la variable en indice ; si l'on pose $u_p = 2p+1$, on pourra alors écrire :
$$\sum_{p=0}^{499} u_p = 250000.$$

Conseil

Lorsqu'on utilise la notation $\sum$, il faut toujours vérifier les bornes de la somme qui sont source de nombreuses erreurs. Il est souvent utile de développer partiellement la somme et d'en écrire les premiers et derniers termes :

$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = \underbrace{1}_{2*0+1} + \underbrace{3}_{2*1+1} + \underbrace{5}_{2*2+1} + \cdots + \underbrace{997}_{2*498+1} + \underbrace{999}_{2*499+1}$$

Remarque

Par convention, une somme indexée par l'ensemble vide est nulle. Exemple : $\sum_{k=1}^{-1} 1 = 0$.

Propriété 1.10

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \ ; \qquad \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \ ; \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$$

où $n \geq 1$ est un entier et les a_k, b_k, λ sont des nombres réels.

1.1.6.2 Changement d'indice

Remarque
Dans ce qui précède, on a écrit les entiers impairs sous la forme $2p+1$, pour p allant de 0 à 499. Or l'on peut très bien écrire les 500 premiers entiers impairs sous la forme $2k-1$, où k prend toutes les valeurs entières de 1 à 500. On a en effet

$$\sum_{p=0}^{499}(2p+1) = \sum_{k=1}^{500}(2k-1)$$

et la relation entre p et k s'écrit $p = k-1$.

On vérifie facilement que $2p+1 = 2(k-1)+1 = 2k-1$; quand $p=0$, on a $k=1$ et pour $p=499$, $k=500$.

Méthode
De façon générale, lorsque l'on remplace la variable muette dans une expression, il faut changer toutes les occurrences et les bornes, c'est-à-dire le début et la fin de la somme. Comme la variable est notée en indice, on parle de **changement d'indice**.

Conseil
Il est très facile de se tromper en effectuant un changement d'indice. Pour limiter le risque d'erreur, il est vivement recommandé d'en vérifier l'exactitude en développant partiellement la somme, en particulier les premiers termes et les derniers.

Exemple
- On a
$$\sum_{i=1}^{10} i = \sum_{p=0}^{9}(p+1) = \sum_{k=2}^{11}(k-1) = \sum_{i=-1}^{8}(i+2)$$
- Notons $v_k = \frac{1}{2k-1}$; alors :
$$\sum_{k=4}^{8}\frac{1}{2k-7} = \sum_{k=4}^{8}\frac{1}{2(k-3)-1} = \sum_{k=4}^{8} v_{2(k-3)-1} = \sum_{k=0}^{4} v_k$$

Attention
Il faut bien préciser sur quels éléments porte le symbole $\sum$. En cas de doute, il vaut mieux mettre des parenthèses.

Exemple

$$\left(\sum_{i=1}^{10} 2i\right) + 1 = \sum_{i=1}^{10} 2i + 1 \neq \sum_{i=1}^{10}(2i+1)$$

1.1.6.3 Produits

De façon analogue à la sommation, on utilise la lettre grecque majuscule Pi, $\prod$, pour noter un produit contenant un grand nombre de facteurs. Cette notation a été introduite par Descartes et Gauss.

Exemple
Un exemple est la factorielle d'un nombre entier n :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Conseil
Comme pour la sommation "$\sum$", il faut toujours vérifier les bornes du produit "$\prod$", en particulier en écrivant les premiers et derniers termes.

Remarque
Par convention, un produit indexé par l'ensemble vide est égal à 1. Exemple : $0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$.

Propriété 1.11

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) \ ; \qquad \prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k \ ; \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$$

où $n \geq 1$ est un entier et les a_k, b_k,λ sont des nombres réels.

1.1.6.4 Sommes classiques

Nous donnons ici quelques sommes qui sont d'un usage très fréquent. Elles sont toutes de la forme générale $\sum_{k=1}^{n} a_k$ où n est un entier naturel et les a_k sont des réels.

Fondamental

- Suites puissances. $a_k = k^p$, où p est un entier :
  $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ .$$
- Différence de puissances. n est un entier et a, b des réels :
  $$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a-b)\textstyle\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \end{aligned}$$
- Suites géométriques. $a_k = \alpha^k$, où α est un réel :
  $$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ n+1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Plus généralement :

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha^k = \alpha^m \sum_{k=0}^{n-m} \alpha^k = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^m}{\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

- Formule du binôme. n, k sont des entiers :
  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ ,$$

avec

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))(n-k+1)}{k!} \ .$$

1.1.7 Langage formel et métalangage

Pour conclure cette introduction au langage mathématique, revenons sur les différents niveaux de langage présents dans un texte mathématique.

Définition 1.12

1. Le **langage formel** ou **symbolique**. C'est la partie du texte qui utilise des formules, notations, symboles et mots ayant un sens précis en mathématiques.
   Exemples :
   - $n \in \mathbb{N}$
   - $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$
   - z est un nombre complexe
   - La fonction f est continue au point $a \in \mathbb{R}$
2. Le **métalangage** ou **langage métamathématique**. C'est la partie du texte qui exprime les liens entre les propositions, comment elles se déduisent les unes des autres et ce que l'on peut affirmer au sujet de leur valeur de vérité. Ceci permet de rendre plus lisibles les définitions et les énoncés des propositions et théorèmes.
   Exemples :
   - Si $(x-1)(x-2) < 0$ alors x est positif.
   - Soit n un entier non nul tel qu'il existe un entier non nul p avec $n = 2p$.
   - Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier non nul n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
   - L'aire d'un disque de rayon r est donnée par $A = \pi r^2$.
3. Afin d'augmenter la lisibilité et la clarté d'un texte mathématique, on utilise des commentaires, des figures, des rappels, des références,... Cela permet d'expliquer ce que l'on va faire, de commenter un résultat, de relier un calcul ou une affirmation à des résultats connus.

Fondamental

Pour rédiger un texte mathématique clair et compréhensible, il faut faire particulièrement attention aux points suivants :

1. bien définir les objets et préciser les notations utilisées si le contexte n'est pas clair ;
2. ne pas tronquer un calcul ou une démonstration pour arriver de façon "magique" au résultat ;
3. ne pas utiliser les symboles "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$" de façon abusive : ce ne sont pas des abréviations ;
4. veiller à l'orthographe et à la grammaire.

1.2 Exercices

1.2.1 Négation de propositions

1. Soit P la proposition « Il y a des baleines blanches ». Écrire P dans le langage formel en utilisant des quantificateurs.

2. On considère les propositions suivantes :

1. Q_1= « Toutes les baleines sont noires » ;
2. Q_2= « Il y a des baleines noires » ;
3. Q_3= « Aucune baleine n'est blanche » ;
4. Q_4= « Il y a des baleines qui ne sont pas blanches ».

Laquelle de ces propositions est équivalente à *non* P ?

1.2.2 Quantificateurs

f désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire en langage courant et comprendre la signification des expressions logiques suivantes. Écrire ensuite la négation de chacune d'entre elles, en langage courant puis en langage mathématique .

1. $\forall x \geq 0, \exists m > 1/f(x) \leq m$

2. $\exists m > 1/\forall x \geq 0/f(x) \leq m$

3. $\forall x \geq 0, \forall m > 1, f(x) \leq m$

1.2.3 Quantificateurs

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, A l'ensemble des nombres pairs, et B l'ensemble des nombres premiers. Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes.

1. Tout nombre pair est divisible par 2.

2. Aucun nombre impair n'est divisible par 2.

3. Il n'existe pas de nombre premier pair distinct de 2.

4. Tout nombre premier distinct de 2 est impair.

5. Il existe un nombre pair qui divise tout nombre pair.

6. Tout nombre premier divise au moins un nombre pair

1.2.4 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^{n} 2 \ , \quad (2) \sum_{k=0}^{n} (2k) \ , \quad (3) \sum_{k=m}^{n} k \ , \quad (4) \sum_{k=0}^{n} (2k+1) \ , \quad (5) \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k .$$

1.2.5 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^{n} 2^k \ , \quad (2) \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \ , \quad (3) \sum_{k=0}^{n} 2^{(-k)} \ , \quad (4) \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} \ , \quad (5) \sum_{k=0}^{2n+1} 2^k 4^{n-k} .$$

1.2.6 Calcul de sommes

Calculer les sommes suivantes :

$$(1)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\ , \quad (2)\ \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}\ , \quad (3)\ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}\ , \quad (4)\ \sum_{k=1}^{n} \left(k + \frac{\sum_{p=0}^{k-1}(p+1)}{\sum_{q=0}^{k}(2q)} \right).$$

1.2.7 Factorielles

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(2n)! &= \prod_{k=1}^{n} (n+k) \cdot n! \\
&= n^n \cdot n! \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\
&= \prod_{p=1}^{n} (2p)(2p-1) \\
&= 2^n \cdot n! \cdot \prod_{p=0}^{n-1} (2p+1)
\end{aligned}$$

2. Proposer une formulation simple, en termes de factorielles, pour $\prod_{p=1}^{n}(2p)$, puis pour $\prod_{p=1}^{n}(2p-1)$.

1.2.8 Calcul de produits

Calculer les produits suivants :

$$(1)\ \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\ , \quad (2)\ \prod_{k=1}^{n} (5 \cdot 2^k)\ , \quad (3)\ \prod_{k=1}^{2n} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

1.2.9 Calcul de sommes avec deux indices

Expliciter les sommes suivantes et les calculer :

$$(1)\ \sum_{1 \le i,j \le 7} j\ , \quad (2)\ \sum_{1 \le i \le j \le 7} j\ , \quad (3)\ \sum_{1 \le i \le j \le 7} i\ , \quad (4)\ \sum_{1 \le i,j \le 7} \min(i,j)\,.$$

2

Ensembles et éléments

Introduction

La théorie des ensembles est née à la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle à la suite des travaux du mathématicien Georg Cantor. Elle a apporté de nouvelles fondations aux mathématiques et clarifié la notion d'infini. Dans ce chapitre, nous n'allons pas présenter ses résultats, mais plutôt son vocabulaire qui est devenu une langue commune à tous les mathématiciens.

Quelques références :
- À la bibliothèque :
  - Chapitre 1« Introduction à la théorie des ensembles », Réussir ses maths en prépa scientifique[8]
- Sur le web :
  - Bases, Mathématiques[5] , chapitre Ensemble
  - Ensembles[6], M@th en Ligne
  - Logique et langage des ensembles[4], Université en Ligne
  - Ensembles et sous-ensembles, Introduction aux mathématiques universitaires[9]
  - Sets[10], OpenLearn (en anglais)

  Pour aller plus loin :
  - Cantor[11], ChronoMaths
  - Dictionnaire de la théorie des ensembles[12], Bibm@th.net
  - Les fondements des mathématiques[13], Université de Tous Les Savoirs

2.1 Cours

2.1.1 Définition et exemples

Définition 2.1 : Ensembles et éléments
Un **ensemble** est une collection d'objets qui sont appelés ses **éléments**. Ces éléments peuvent être de tous types : nombres, figures géométriques, solutions d'une équation différentielle, ensembles...

Syntaxe
La propriété « x est élément de E » se note $x \in E$. On dit aussi que « x appartient à E ». La négation se note $x \notin E$.

Exemple : Quelques ensembles bien connus

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls)
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, certainement l'ensemble le plus compliqué à décrire... Si riche soit-il, $\mathbb{Q}$ ne permet pas de décrire l'ensemble des quantités qui apparaissent en mathématiques, comme $\sqrt{2}$ ou π. L'ensemble des réels a donc été introduit pour permettre l'expression de telles quantités. On peut dire qu'il complète $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et i imaginaire pur vérifiant $i^2 = -1$

Syntaxe
L'ensemble constitué des éléments $x_1, \ldots, x_n$, sans répétition, est noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$. L'ordre d'écriture des éléments est sans importance.

Fondamental : Égalité de deux ensembles
Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

Définition 2.2 : Cardinal, singleton, paire

- Le **cardinal** d'un ensemble est le nombre de ses éléments. Ce nombre peut être fini ou infini. Lorsque le cardinal est fini, on dit que l'ensemble est fini ; sinon que l'ensemble est infini.
- Un **singleton** est un ensemble de cardinal 1, une **paire** un ensemble de cardinal 2.

Propriété 2.3 : L'ensemble vide
Il existe un et un seul ensemble de cardinal 0, ne contenant aucun élément. Cet ensemble est appelé l'**ensemble vide** et noté $\emptyset$.

Attention
Ne pas confondre x et $\{x\}$. Par exemple, $\{\mathbb{R}\}$ et $\{\emptyset\}$ sont des singletons, mais ni $\mathbb{R}$ ni $\emptyset$ ne le sont...

2.1.2 Sous-ensembles

2.1.2.1 Partie d'un ensemble

Définition 2.4 : Sous-ensemble
Un **sous-ensemble** ou une **partie** d'un ensemble E est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à E.

Syntaxe : Inclusion
La propriété « A est un sous-ensemble de E » se note $A \subset E$. On dit aussi que « A est inclus dans E ». La négation se note $A \not\subset E$.

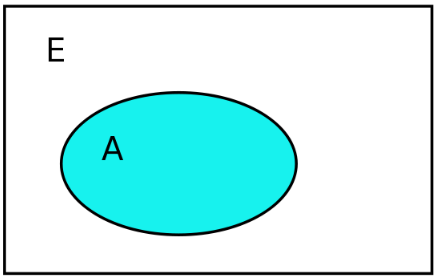

FIGURE 2.1 – Partie A dans E

Exemple

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$
- $\{(1, 2)\} \not\subset \{(0, 1), (2, 3)\}$

Fondamental : Lien entre appartenance et inclusion

Il ne faut pas confondre l'appartenance et l'inclusion, mais les deux notions sont évidemment en correspondance, comme le rappellent les deux équivalences suivantes :

- $x \in E \Longleftrightarrow \{x\} \subset E$
- $A \subset E \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(x \in E)$

Cette dernière assertion est elle-même équivalente à

- $A \not\subset E \Longleftrightarrow (\exists x \in A)(x \notin E)$

Remarque

Il faut noter que l'inclusion n'exclut pas l'appartenance. Par exemple, $\{0\}$ est à la fois un élément et une partie de $\{0, \{0\}\}$.

Complément : Inclusion stricte

Soit A une partie d'un ensemble E. Si $A \neq E$, on dit que A est **inclus strictement** dans E. Ce que l'on note parfois $A \subsetneq E$.

2.1.2.2 Définir un ensemble

Pour décrire un ensemble ou un sous-ensemble, on peut établir la liste de ses éléments. On dit alors que l'ensemble est **défini en extension**. Ce n'est possible que pour des ensembles finis.

Exemple

- Ensemble des valeurs faciales des billets d'euro : $\{5, 10, 20, 50, 100, 200, 500\}$
- Ensemble des racines cubiques de l'unité : $\{1, j, j^2\}$
- Ensemble des chiffres pairs : $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Un ensemble A peut être aussi défini par un **paramétrage**, c'est-à-dire comme l'image d'un ensemble connu B par une fonction f (cf le chapitre correspondant) :

$$A = \{f(x), x \in B\}$$

Exemple

- Ensemble des racines cubiques de l'unité : $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}\right\}$
- Ensembles des entiers naturels pairs : $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$

Il est aussi possible de caractériser un ensemble A par un ensemble connu E qui le contient et une propriété P vérifiée par ses éléments :

$$A = \{x \in E / P(x)\}$$

On dit alors que l'ensemble est **défini en compréhension**.

Exemple

- Ensemble des racines cubiques de l'unité :$\{z \in \mathbb{C}/z^3 = 1\}$
- Ensemble des entiers naturels pairs : $\{n \in \mathbb{N}/(\exists k \in \mathbb{N})(n = 2k)\}$
- $[0,2] = \{x \in \mathbb{R}/0 \leq x \leq 2\}$

2.1.2.3 Ensemble des parties

Définition 2.5 : Ensemble des parties
L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$.

Autrement dit : $A \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E$.

Exemple : Sous-ensembles élémentaires
Quel que soit l'ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient donc toujours au moins deux éléments, sauf si $E = \emptyset$, auquel cas il n'en contient qu'un seul. En conséquence, il n'est jamais vide.

Propriété 2.6
Soit E un ensemble.

- Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est toujours strictement plus grand que le cardinal de E.

- Si E est de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n.

2.1.2.4 Inclusion et implication

Lorsque l'on traduit dans le langage mathématique formel les prédicats ou les opérations qui interviennent en théorie des ensembles, on voit apparaître une correspondance simple avec les connecteurs logique. Cette correspondance est la clef d'un grand nombre de démonstrations.

La première de ces correspondances fait le lien entre l'implication et l'inclusion. Considérons A et E deux ensembles ; alors il est possible de caractériser l'inclusion de A dans E par une implication :

$$A \subset E \text{ si et seulement si } (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in E)$$

On en déduit un critère de non-inclusion :

$$A \not\subset E \text{ si et seulement si } (\exists x)(x \in A \text{ et } x \notin E)$$

Méthode
On en déduit :
- Pour montrer qu'un ensemble A est une partie d'un ensemble E, il suffit de prendre un élément quelconque dans A et de montrer qu'il appartient à E.
- Pour montrer que A n'est pas une partie de E, il suffit de trouver un élément particulier de A qui n'appartienne pas à E.

Inversement, on peut exprimer une implication par une inclusion. Considérons E un ensemble, P et Q deux propositions logiques portant sur les éléments de E ; l'implication de P vers Q équivaut à une inclusion :

$$(\forall x \in E)\,(P(x) \Longrightarrow Q(x)) \text{ si et seulement si } \{x \in E/P(x)\} \subset \{x \in E/Q(x)\}$$

2.1.2.5 Égalité de deux ensembles

Définition 2.7 : Égalité
Deux ensembles E et F sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments.

Formellement :

$$E = F \text{ si et seulement si } (\forall x)(x \in E \Longleftrightarrow x \in F)$$

Méthode
De la même façon que l'équivalence correspond à une double implication, l'égalité de deux ensembles est équivalente à une double inclusion : $E = F \Longleftrightarrow (E \subset F)$ et $(F \subset E)$.

Pour démontrer une telle égalité, on peut donc procéder en deux étapes : montrer la première inclusion, puis la seconde.

2.1.3 Opérations sur les ensembles

Introduction

A partir de deux ensembles, il est possible d'en construire de nouveaux :
- l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou à l'autre ;
- l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux ;
- l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un mais pas à l'autre ;
- etc.

On regroupe ces procédés sous le terme générique d'**opérations**. Cette section est consacrée à leur description.

2.1.3.1 Réunion de deux ensembles

Définition 2.8 : Réunion
Soit A et B deux parties d'un même ensemble E. La réunion de A et B est le sous-ensemble de E constitué des éléments appartenant à A ou à B (éventuellement aux deux). On le note $A \cup B$.

Autrement dit : $A \cup B = \{x \in E/x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (avec ou le connecteur logique standard).

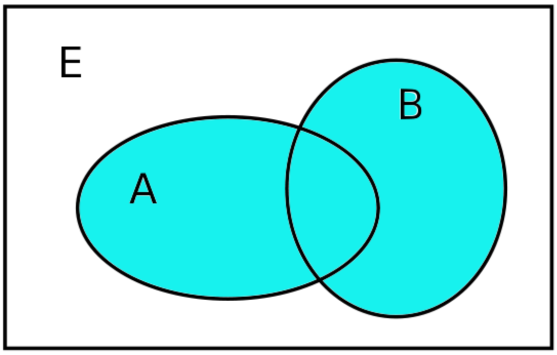

Figure 2.2 – Réunion de A et B

Propriété 2.9
Soit A, B et C des parties d'un même ensemble E.
- $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité) ;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité).

Complément
Soit $(A_i, i \in I)$ une famille de parties d'un ensemble E. La réunion étant commutative et associative, il est possible de définir la réunion de tous les A_i sans avoir besoin de préciser l'ordre ou le parenthésage. On le note $\bigcup_{i \in I} A_i$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / (\exists i \in I)(x \in A_i)\}$$

Exemple
Soit E un ensemble. Alors

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(E)} A$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$$

2.1.3.2 Intersection de deux ensembles

Définition 2.10 : Intersection
Soit A et B deux parties d'un même ensemble E. L'intersection de A et B est le sous-ensemble de E constitué des éléments appartenant à A et à B. On le note $A \cap B$.

Autrement dit : $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$

Propriété 2.11
Soit A, B et C des parties d'un même ensemble E.

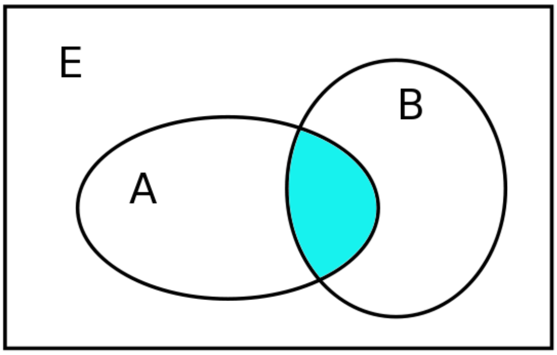

FIGURE 2.3 – Intersection de A et B

- $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- $A \cap A = A$;
- $A \cap B = B \cap A$ (commutativité) ;
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité).

Complément
Soit $(A_i, i \in I)$ une famille de parties d'un ensemble E. L'intersection étant commutative et associative, il est possible de définir l'intersection de tous les A_i sans avoir besoin de préciser l'ordre ou le parenthésage. On le note $\bigcap_{i \in I} A_i$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / (\forall i \in I)(x \in A_i)\}$$

Exemple
Soit E un ensemble. Alors

$$\emptyset = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(E)} A$$

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}_+^*}]-x, x[= \{0\}$$

2.1.3.3 Différences

Définition 2.12 : Différence de deux ensembles
Soit A et B deux parties d'un même ensemble E. La différence de A avec B est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On le note $A \setminus B$.

Autrement dit : $A \setminus B = \{x \in A / x \notin B\}$

Définition 2.13 : Différence symétrique de deux ensembles
Soit A et B deux parties d'un même ensemble E. La différence symétrique de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B, mais pas aux deux. On le note $A \Delta B$.

Autrement dit :

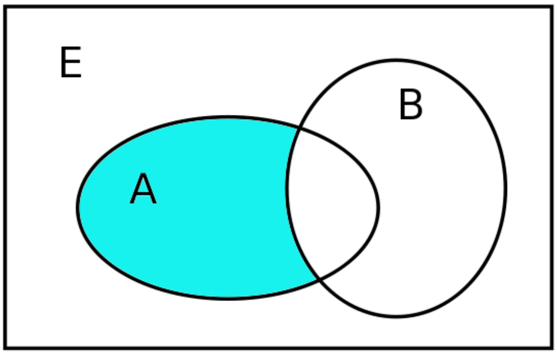

Figure 2.4 – Différence de A par rapport à B

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= \{x \in E / x \in A \text{ ou}_{exclusif} x \in B\} \end{aligned}$$

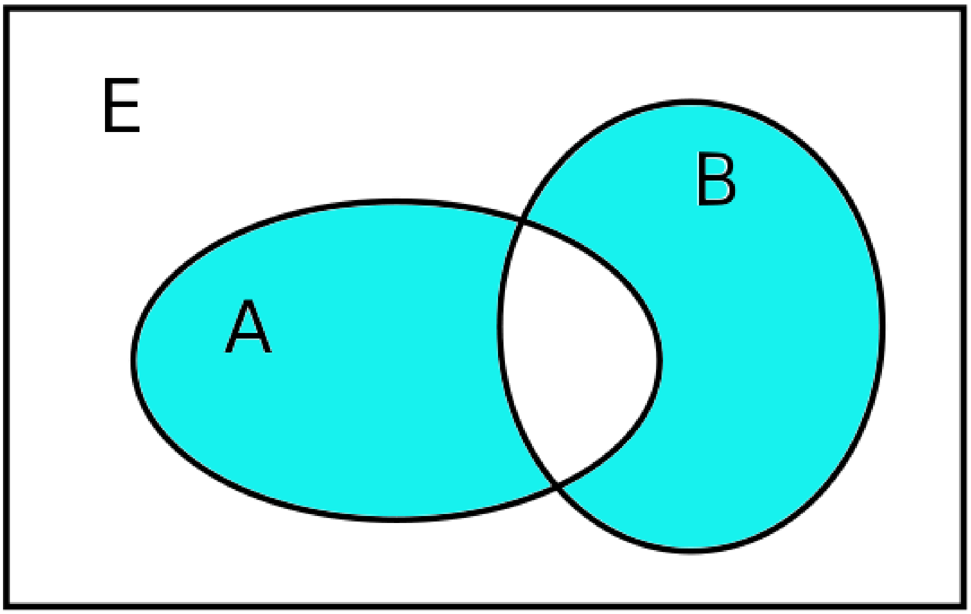

Figure 2.5 – Différence symétrique de A et B

Propriété 2.14
Soit A, B et C des parties d'un même ensemble E.

- $A\Delta\emptyset = A$
- $A\Delta A = \emptyset$
- $A\Delta B = B\Delta A$ (commutativité)
- $A\Delta (B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (associativité).

2.1.3.4 Complémentaire d'un ensemble

Définition 2.15 : Complémentaire
La différence d'un ensemble E avec l'une de ses parties A est appelée complémentaire de A dans E. On le note $\complement_E A$.

Autrement dit,

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$$

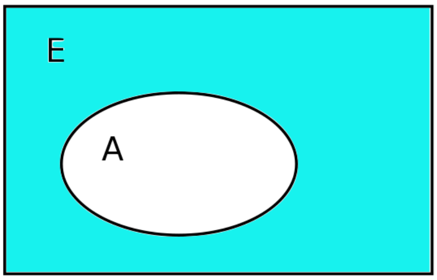

FIGURE 2.6 – Complémentaire de A dans E

Propriété 2.16 : Involution
Le passage au complémentaire est une involution : $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$.

2.1.3.5 Relations croisées

Propriété 2.17 : Réunion, intersection et complémentaire
Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

- $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$;
- $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

Propriété 2.18 : Distributivité
Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \, \Delta \, (A \cap C)$

Attention
Dans la plupart des situations, il ne faut pas oublier les parenthèses. Par exemple, $(A \cap B) \cup C$ est différent en général de $A \cap (B \cup C)$. L'expression $A \cap B \cup C$ n'a donc pas de sens.

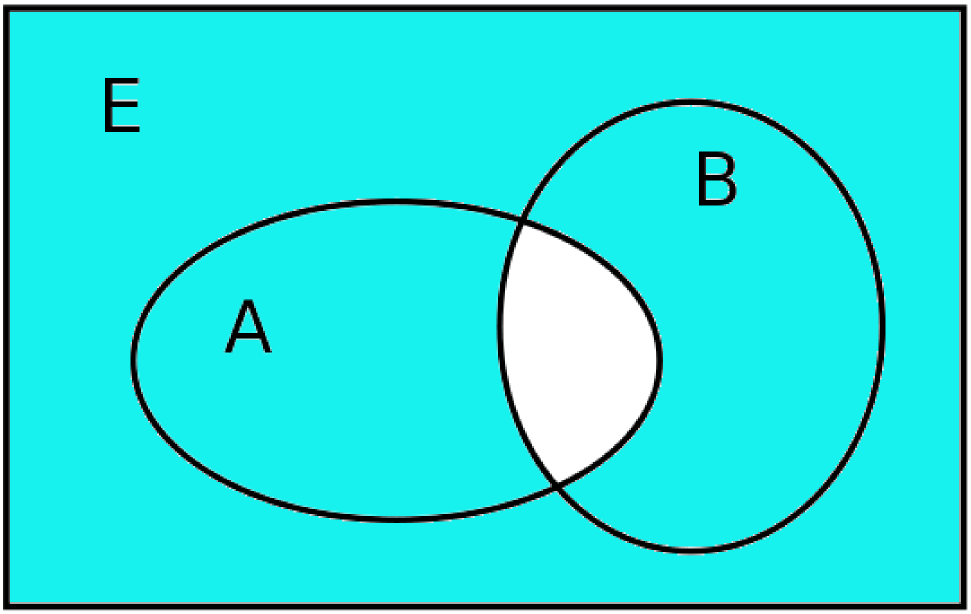

FIGURE 2.7 – Complémentaire d'une intersection

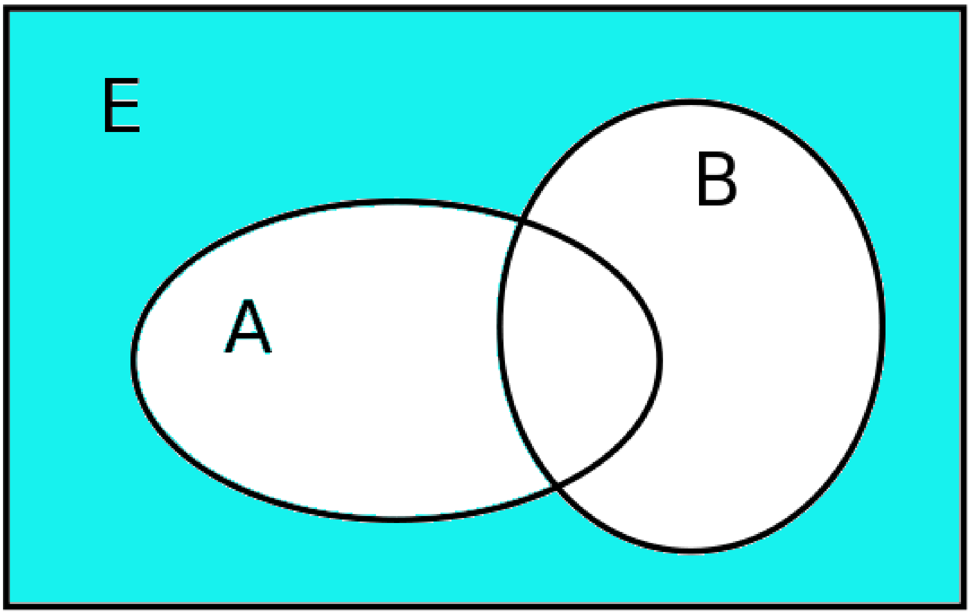

FIGURE 2.8 – Complémentaire d'une réunion

2.1.3.6 Résumé des correspondances entre logique et théorie des ensembles

Dans toute la suite, on notera E un ensemble et A et B deux de ses parties.

Fondamental : Résumé

– $\subset$ et $\Longrightarrow$: $A \subset B$ si et seulement si $(\forall x \in E)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$

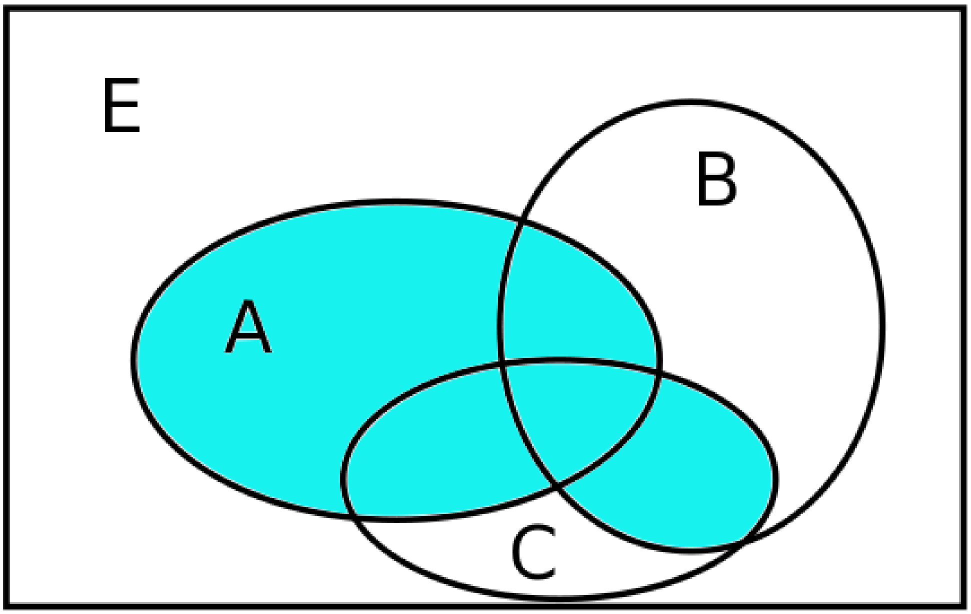

Figure 2.9 – Distributivité de la réunion sur l'intersection

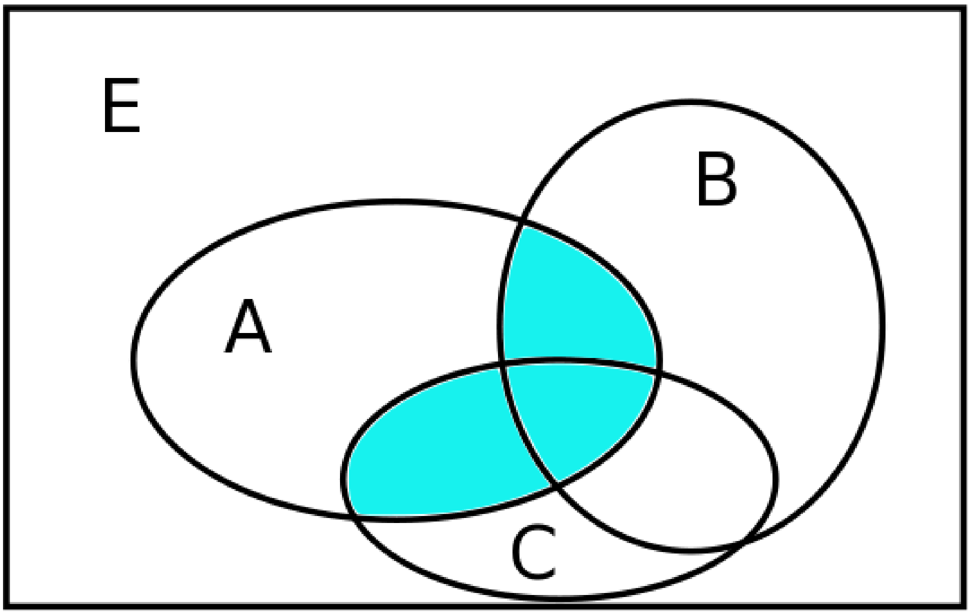

Figure 2.10 – Distributivité de l'intersection sur la réunion

- $=$ et $\Longleftrightarrow$: $A = B$ si et seulement si $(\forall x \in E)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$
- $\complement_E$ et « non » : $(\forall x \in E)(x \in \complement_E A$ si et seulement si non$(x \in A))$
- $\cup$ et « ou » : $(\forall x \in E)(x \in A \cup B$ si et seulement si $(x \in A$ ou $x \in B))$
- $\cap$ et « et » : $(\forall x \in E)(x \in A \cap B$ si et seulement si $(x \in A$ et $x \in B))$
- Δ et « ou exclusif » : $(\forall x \in E)(x \in A \Delta B$ si et seulement si $(x \in A$ ou$_{exclusif}$ $x \in B))$

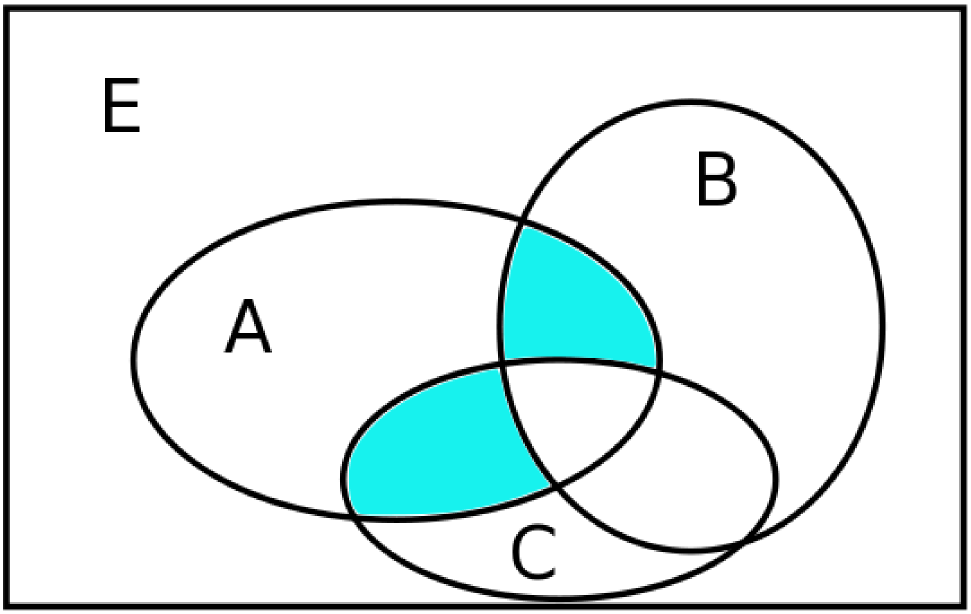

FIGURE 2.11 – Distributivité de l'intersection sur la différence symétrique

2.1.4 Produit cartésien

Définition 2.19 : Produit cartésien
Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble des couples formés d'un élément de E, en premier argument, et d'un élément de F, en deuxième argument. On le note $E \times F$.

Autrement dit : $E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$

Attention
L'ordre des éléments dans un couple est important : si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$.

Remarque
Les éléments de $E \times F$ n'appartiennent ni à E, ni à F.

Exemple
$\{A, B, C\} \times \{0, 1\} = \{(A, 0), (A, 1), (B, 0), (B, 1), (C, 0), (C, 1)\}$

Propriété 2.20
Si E et F sont des ensembles finis de cardinaux m et n respectivement, alors $E \times F$ est fini et de cardinal mn.

Définition 2.21 : Produit cartésien itéré
On peut généraliser la définition précédente aux familles finies ou infinies d'ensembles. Soit $(E_k, k \geq 1)$ une suite d'ensembles. On définit, pour tout $n \geq 1$:

- $\prod_{k=1}^{n} E_k = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)/x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$
- $\prod_{k=1}^{+\infty} E_k = E_1 \times E_2 \times \cdots = \{(x_1, x_2 \ldots)/x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots\}$

Remarque : Notations
Le produit cartésien d'un ensemble E avec lui-même est noté E^2. De façon analogue, on note $\prod_{k=1}^{n} E$ par E^n et $\prod_{k=1}^{+\infty} E$ par E^∞.

Exemple : Coordonnées cartésiennes

- L'ensemble des coordonnées cartésiennes des points du plan est $\mathbb{R}^2$.
- De même, l'ensemble des coordonnées des points de l'espace (de dimension 3) est $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble des suites réelles est le produit cartésien infini $\mathbb{R}^\infty$.

2.2 Exercices

2.2.1 Réunion, intersection et différence

Pour chacun des ensembles A et B ci-dessous, déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$:

1. $A = \{-1, 0, 1\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$
2. $A = [0, 2]$ et $B =]1, 3[$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y^2\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 4y^2\}$

2.2.2 Ensemble des parties

Soit $E = \{1, 2, 3\}$.

Décrire en extension l'ensemble de ses parties.

2.2.3 Cardinal d'une réunion et d'une intersection

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On suppose que A possède 8 éléments et que B en possède 5.

1. Combien peut-il y a avoir d'éléments dans $A \cup B$? dans $A \cap B$?
2. Mêmes questions en supposant de plus que E possède 10 éléments.

2.2.4 Égalité de deux ensembles

On définit les deux ensembles :

$$A = \left\{ \left(t^2, 2t\right), t \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = 4x \right\}$$

Montrer que $A = B$.

2.2.5 Ensembles plans

Dessiner chacun des ensembles suivants :

1.
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1\right\}$$

2.
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < 2 - 2x\right\}$$

3.
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4\right\}$$

4.
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y+3)^2 > 1\right\}$$

5.
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+1| = y - 3\right\}$$

2.2.6 Inclusion stricte

On définit

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 < 1\right\} \text{ et } B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < \frac{1}{2}\right\}$$

Montrer que A est strictement inclus dans B.

2.2.7 Lois de Morgan

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités :

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

2.2.8 Opération sur les ensembles

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, on note $A \cdot B = \complement_E (A \cap B)$.

En utilisant seulement cette nouvelle opération, exprimer $\complement_E A$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$.

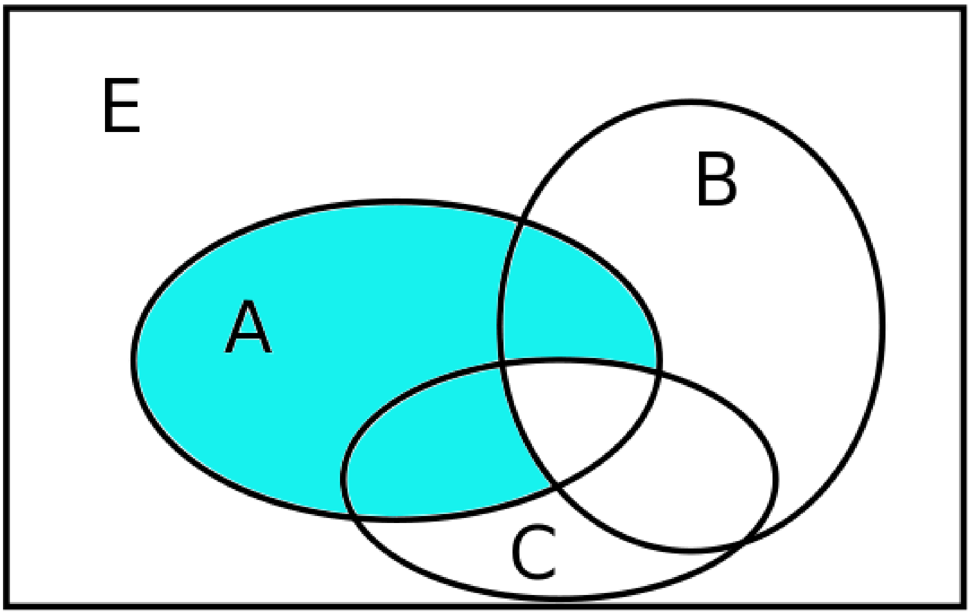

FIGURE 2.12 – Première loi de Morgan

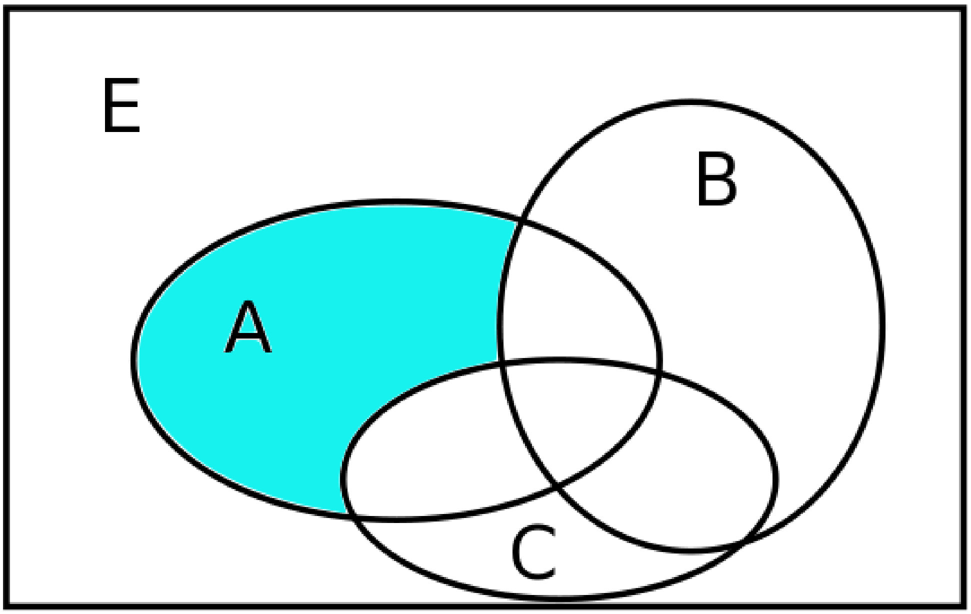

FIGURE 2.13 – Deuxième loi de Morgan

2.2.9 Équation ensembliste

Dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ de l'ensemble E, on considère deux parties A et B.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A \cap X = B$ admette une solution dans $\mathcal{P}(E)$. La résoudre lorsque cette condition est remplie.

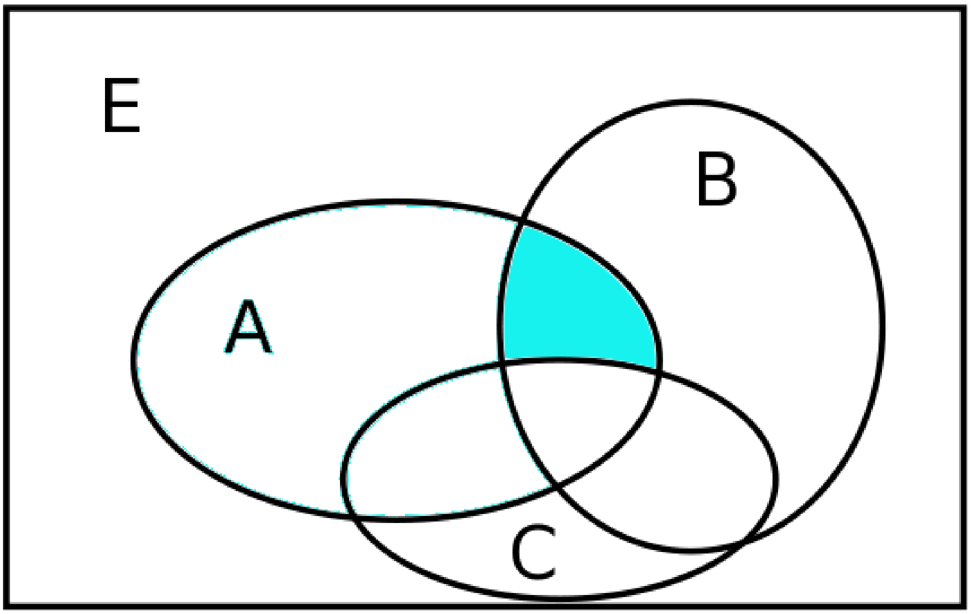

FIGURE 2.14 – Troisième loi de Morgan

2. Même question avec l'équation $A \cup X = B$.

2.2.10 Calcul ensembliste

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Démontrer les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$

2. $A = B \Longleftrightarrow A \cap B = A \cup B$

3. $(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Longleftrightarrow B \subset C$

Bibliographie

[1] *Maths - Visa pour la licence 1*, François Liret & Charlotte Scribot, Dunod **2009**. Cote 510 LIR

[2] *Cahier de vacances de Méthod'X - de la terminale à la prépa - Mathématiques*, Xavier Merlin, Ellipses, **2005** ; Cote MER 511

[3] *Objectif Prépa Maths*, Sylvie Martin, Jean Ponsaud, Jacques Turner, Coll. H-Prépa, Hachette Éducation, **2008** ; cote 511 MAT

[4] *Logique et langage des ensembles* , Université en Ligne, Unisciel

[5] *Bases* , Mathématiques, Gilles Dubois

[6] *Langage mathématique*, M@ths en Ligne, Bernard Ycart, Université Joseph Fourier

[7] *Language, notation and formulas*, OpenLearn - The Open University

[8] *Réussir ses Maths en prépa scientifique*, Bruno Escoffier, Ellipses, **2009** ; Cote 511 ESC

[9] *Introduction aux mathématiques universitaires* , Université Libre de Bruxelles

[10] *Sets* , Mathematical language, OpenLearn - The Open University

[11] *Cantor* , ChronoMaths, Serge Mehl

[12] Théorie des ensembles , Bibm@th.net

[13] *Les fondements des mathématiques* , Jean-Yves Girard, Université de Tous Les Savoirs

[14] *e-Maths* , Insa de Lyon

[15] *Mathématiques* , Gilles Dubois.

[16] *M@th en ligne* , Bernard Ycart, Université Joseph Fourier

[17] *Mathématiques* , Université en Ligne, Unisciel

[18] *Mathématiques : Du bac S au DEUG Sciences*, Georges Lion, Coll. Flash U, Masson. Cote 510 Lion