Université Paris Descartes
**UFR de Mathématiques et Informatique**
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

# Licence de Mathématiques et Informatique 2013-2014

(ma)Thématiques de Pré-rentrée

TD1

**Observations générales :**

## 1 Sommes et produits

**Exercice 1.** Sans en effectuer le calcul, déterminer si la somme $\sum_{k=0}^{n}(4k-2n+2)^2$ est égale à

1. $4\sum_{l=0}^{2n}(l-n+1)^2$ ?
2. $\sum_{l=0}^{n}(2n-4l+2)^2$ ?
3. $\sum_{l=1}^{n+1}(4l-2n+6)^2$ ?
4. $\sum_{l=1}^{n+1}(4l-2n-2)^2$ ?

**Didascalie**
Il faut bien sûr d'abord développer les premiers et derniers termes de la série.

**Observations :**

**Éléments de réponse**

**1.1. Solution simple :** Non (il y a $2n+1$ termes)

**1.2. Solution simple :** Oui ($k = n - l$)

**1.3. Solution simple :** Non, les bornes ne sont pas les bonnes.

**1.4. Solution simple :** Oui, on a fait le changement de variables $l = k + 1$.

## Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) $\sum_{k=0}^{n} 2$ | (2) $\sum_{k=0}^{n}(2k)$ | (3) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ | (4) $\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$ |
| (5) $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}3^{n-k}$ | (6) $\sum_{k=0}^{2n}\begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix}$ | (7) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ | (8) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ |

**Didascalie**
Pour le (3), on peut faire une preuve graphique.

**Observations :**

**Éléments de réponse**

**Solution simple :**

1. $2(n+1)$
2. $n(n+1)$
3. $(n+1)^2$
4. $\frac{2-(-2)^{n+1}}{3}$
5. $4^{n+1} - 3^{n+1}$
6. $\frac{1}{2}((1+1)^{2n} + (1-1)^{2n})$
7. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ d'où $(7) = 1 - \frac{1}{n+1}$
8. $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ d'où $(8) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

## Exercice 3. Calculer les produits suivants :

$$(1) \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad (2) \prod_{k=1}^{n}(5 \cdot 2^k), \quad (3) \prod_{k=1}^{2n}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

**Observations :**

**Éléments de réponse**

**Solution simple :**

1. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$
2. $\prod_{k=1}^{n}(5\cdot 2^k)=5^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
3. $\prod_{k=1}^{2n}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k=2^{-\frac{n(2n+1)}{2}}$.

**Exercice 4.** Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

**Observations :**

**Éléments de réponse**

**Solution simple :**

– $\prod_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{(2n)!}{n!}$.
– $\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=2^n(1\cdot 3\cdots(2n-1))=2^n\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots 2n}=2^n\frac{(2n)!}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{n!}$.

## 2 Démonstration par récurrence

**Exercice 5.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 2$ et pour tous réels $a_1,\ldots,a_n$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leq 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

**Observations :**

**Éléments de réponse**

**Solution simple :**

– Le résultat est vrai pour $n=1$.
– Il est aussi vrai pour $n=2$ : $(a_1+a_2)^2\leq 2(a_1^2+a_2^2)$ car $2(a_1^2+a_2^2)-(a_1+a_2)^2=(a_1-a_2)^2$.
– S'il est vrai pour $n\geq 1$, alors, en appliquant le résultat précédent :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 \leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + 2a_{n+1}^2 \leq 2^n \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2$$

Cela achève la démonstration par récurrence.

**Exercice 6.** Soit $p$ un entier impair, $n$ un entier naturel quelconque. Montrer par récurrence que $p^{(2^n)} - 1$ est divisible par $2^{n+1}$.

**Observations :**

#### Éléments de réponse

**Solution simple :**

- Le résultat est vrai pour $n = 0$.
- S'il est vrai pour $n \geq 0$, alors $p^{(2^{n+1})} - 1 = p^{(2^n)} \cdot p^{(2^n)} - 1 = (p^{(2^n)} - 1)(p^{(2^n)} + 1)$ est divisible par $2^n \cdot 2$.

Cela achève la démonstration par récurrence.

**Exercice 7.** Démontrer que :

**1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$

**2.** $\forall n \geq 2, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

**3.** $\forall n \geq 2, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$

**4.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1 + nx.$

**5.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$

**6.** Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$

**7.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Montrer que, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

**Observations :**