Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2013-2014

(ma)Thématiques de Pré-rentrée

TD1

1 Sommes et produits

Exercice 1. Sans en effectuer le calcul, déterminer si la somme $\sum_{k=0}^{n}(4k-2n+2)^2$ est égale à

1. $4\sum_{l=0}^{2n}(l-n+1)^2$?
2. $\sum_{l=0}^{n}(2n-4l+2)^2$?
3. $\sum_{l=1}^{n+1}(4l-2n+6)^2$?
4. $\sum_{l=1}^{n+1}(4l-2n-2)^2$?

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll} (1)\ \sum_{k=0}^{n} 2 & (2)\ \sum_{k=0}^{n}(2k) & (3)\ \sum_{k=0}^{n}(2k+1) & (4)\ \sum_{k=1}^{n}(-2)^k \\ (5)\ \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}3^{n-k} & (6)\ \sum_{k=0}^{2n}\begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} & (7)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} & (8)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} \end{array}$$

Exercice 3. Calculer les produits suivants :

$$(1)\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\ ,\quad (2)\ \prod_{k=1}^{n}(5\cdot 2^k)\ ,\quad (3)\ \prod_{k=1}^{2n}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

Exercice 4. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

2 Démonstration par récurrence

Exercice 5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tous réels $a_1,\ldots,a_n$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Exercice 6. Soit p un entier impair, n un entier naturel quelconque. Montrer par récurrence que $p^{(2^n)} - 1$ est divisible par 2^{n+1}.

Exercice 7. Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$
2. $\forall n \geq 2, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
3. $\forall n \geq 2, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1 + nx.$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$
6. Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$
7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Montrer que, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.